

Antros eilės kreivių ir paviršių geometrija

Kęstutis Karčiauskas

Matematikos ir Informatikos fakultetas

Dalis 0

Įvadas

Pradedame nagrinėti kiek įdomesnius objektus nei tiesės ir plokštumos – kreives ir paviršius. Jų tyrime remsimės jau įgytomis tiesinės algebros ir geometrijos žiniomis. Jei šios žinios sudurstytos kaip elgetos frakas, būsimoji geometrijos egzaminų prognozės nėra optimistinės. Bet gasdinti studentą šurpiu egzaminu tas pats, kas įtikinėti antį vengti šlapio vandens. Taigi pirmyn.

Pirmoje dalyje nagrinėjamos trys kreivės: elipsė, hiperbolė ir parabolė. Kad jos labai svarbios patvirtina jų skaičius – trys (daugelis žinome "Tris muškietininkus", nors rašoma tai apie keturis). Kaip bebūtų su ta trejybe, egzistuoja rimtas paskatas atidžiai su ja susipažinti – po *pirmos* dalies rašomas *pirmas* kontrolinis.

Antroje dalyje – antros eilės kreivės – pateikiami bendresni kreivių tyrimo principai. Ši dalis tampriai susijusi su pirmąja. Esminis panašumas – po *antros* dalies rašomas *antras* kontrolinis. Būkite kruopštūs, kad nuostabi kolekcija – 2-a dalis; 2-os eilės kreivės; 2-as kontrolinis – nepasipildytų eksponatu: kontrolinio įvertinimas = 2.

Trečioje dalyje nagrinėjami antros eilės paviršiai. Lyginant su kreivėmis, paviršių tyrimas gana paviršutiniškas (nieko nuostabaus). Nors po šios dalies kontrolinis nerašomas, keli rimti uždaviniai kantriai laukia trečio kontrolinio.

Trečias kontrolinis rašomas po ketvirtosios dalies. Šioje dalyje supažindinama su šiuolaikine kreivių interpretacija – Bėzier (Bezje) kreivėmis.

Penktoji dalis yra pati smagiausia, nes nereikia mokytis spręsti kokius nors uždavinius – ketvirtas kontrolinis nerašomas. Visgi ši dalis, kurioje trumpai supažindinama su Bėzier paviršiais, kai kam iš jūsų turėtų būti įdomi ir svarbi. Savarankiškai (teisingiau savagalviškai) padirbėję su Bėzier kreivėmis ir paviršiais gal pajusite norą daugiau susipažinti

su šiuolaikiniais jų taikymais. O jei po visų kontrolinių alergija geometrijai nesustiprėjo, būsimuose kursuose sužinosite dar daug įdomaus. Jei alergija geometrijai lieka stipri, nieko baisaus. Egzistuoja pakankamai daug įdomių ir naudingų kursų, kuriuose geometrijos žinios nebūtinos. Bet visvien pabandykite draugiškai gyventi su kreivėmis ir paviršiais. Jums tikrai neteks klausyti kursų, kuriuose geometrinės žinios būtų žalingos.

Sėkmės.

Dalis 1

Elipsė, hiperbolė ir parabolė

1.1 Elipsės ir hiperbolės apibrėžimas

Tarkime plokštumoje yra fiksuoti du taškai F_1 ir F_2 , kurie vadinami *židiniai*. Bet kokiam taškui M atstumus iki židinių F_1 ir F_2 žymime atitinkamai r_1 ir r_2 , t.y. $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ (žr. Pav. 1.1). Atstumą tarp židinių pažymime $2c$, t.y. $|F_1F_2| = 2c$. Dar yra fiksuojamas teigiamas skaičius, kuris žymimas $2a$.

Apibrėžimas 1 Tarkime $a > c$. Elipse vadinama aibė plokštumos taškų M , kurių atstumų iki židinių suma yra pastovi ir lygi $2a$, t.y.

$$r_1 + r_2 = 2a .$$

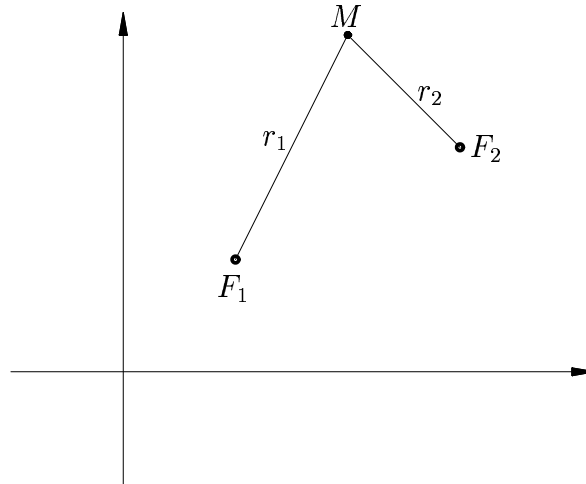
Apibrėžimas 2 Tarkime $a < c$. Hiperbole vadinama aibė plokštumos taškų M , kurių atstumų iki židinių skirtumo absoliutus dydis yra pastovus ir lygus $2a$, t.y.

$$|r_1 - r_2| = 2a .$$

Jei židiniai sutampa, t.y. $F_1 = F_2$, elipsės atveju gauname apskritimą su centru F_1 bei spinduliu a .

Skaičius $e = \frac{c}{a}$ vadinamas kreivės *ekscentricitetu*. Iš apibrėžimo seka, kad

- elipsei $0 \leq e < 1$ ir tik apskritimui ($|F_1F_2| = 2c = 0$) $e = 0$;
- hiperbolei $e > 1$.



Pav. 1.1: Kreivės židiniai

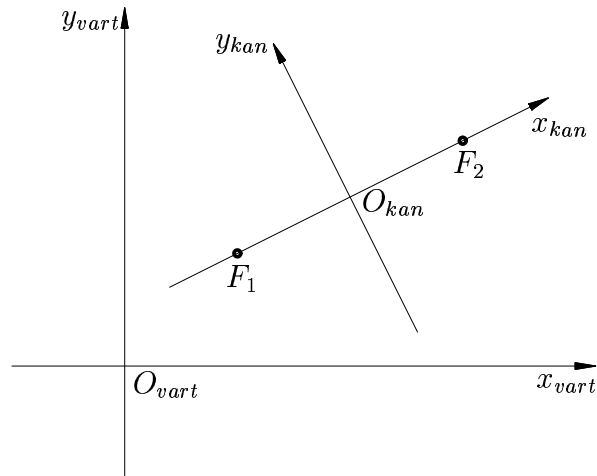
1.2 Kanoninė koordinačių sistema bei kanoninės elipsės ir hiperbolės lygtys

Mes jau tur būt įpratę, kad sprendimui (pratimui pratybose ar kokios tai įmantresnės problemos gvildenimui kompiuteriu) geometriniai duomenys (taškai, tiesių lygtys ...) gaunami koordinatiniame pavidale. Tai reiškia, kad jau yra fiksuota koordinačių sistema, patogi duomenų pateikimui (pavyzdžiui monitoriaus koordinačių sistema). Darbo rezultatus dažniausiai reikia pateikti šioje koordinačių sistemoje. Teoriniam kreivių (elipsės, hiperbolės) tyrimui "vartotojo" sistema yra nepatogi. Todėl pradinė *vartotojo* sistema $O_{vart}x_{vart}y_{vart}$ pakeičiama *kanonine* koordinačių sistema $O_{kan}x_{kan}y_{kan}$ (žr. Pav. 1.2), kuri sudaroma gana paprastai:

- kordinačių pradžia O_{kan} yra atkarpos F_1F_2 vidurys;
- ašis x_{kan} eina per židinius; jos teigiama kryptis nukreipta nuo F_1 link F_2 ;
- ašis y_{kan} statmena ašiai x_{kan} .

Kanoninę koordinačių sistemą žymėsime tiesiog Oxy . Šioje koordinačių sistemoje $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$. Todėl bet kokiam taškui $M(x; y)$ teisinga

$$r_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$



Pav. 1.2: Kanoninė koordinačių sistema

Įstatę šias išraiškas į $r_1 + r_2 = 2a$ arba $|r_1 - r_2| = 2a$ gauname atitinkamai elipsės ir hiperbolės "lygtis". Taip sudarytus reiškinius nekuclu paskelbti kreivių *lygtimis*, nes jų analizinė forma yra komplikauta ir nepritaikyta efektyviam kreivių tyrimui. Šių reiškinių prastinimas yra gana paprastas ir primena iš mokyklos laikų žinomą irracionalių lygčių prastinimą:

- (1) pradinį reiškinį parašome pavidale

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (\text{elipsei}),$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (\text{hiperbolei})$$

ir keliamo kvadratu;

- (2) gautą išraišką suprastiname ir, palikę dešinėje pusėje tik kvadratinę šaknį, dar sykį keliamo kvadratu;
- (3) šiek tiek pasikuitę su gana paprastom išraiškom, abiem – elipsės ir hiperbolės – atvejais gauname

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2); \quad (1.1)$$

- (4) pažymėję

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad \text{elipsei}, \quad (1.2)$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{hiperbolei,} \quad (1.3)$$

bei padaliję lygtį (1.1) iš jos dešinėsios pusės, gauname elipsės ir hiperbolės kanonines lygtis.

Elipsės kanoninė lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.4)$$

Hiperbolės kanoninė lygtis

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.5)$$

Kanoninės lygtys (1.4), (1.5) yra paprastos ir patogios tolimesniam kreivių tyrimui. Bet liko vienas kabliukas, kuris formaliai dar neleidžia jas vadinti kreivių lygtimis – mes tik parodėme, kad elipsės ar hiperbolės taško koordinatės tenkina atitinkamos kreivės kanoninę lygtį. Bet gal yra tokių taškų, kurių koordinatės tenkina kreivės kanoninę lygtį, bet jai pačiai nepriklauso?! Mokyklinė irracionalių lygčių prastinimo patirtis, keliant jas kvadratu, įspėja kad iš tikro taip gali būti. Laimei, šito neatsitinka. Tai bus gana greitai įrodyta. Bet nelaukdami šio formalaus patvirtinimo jau dabar iširsime elipsės ir hiperbolės formą.

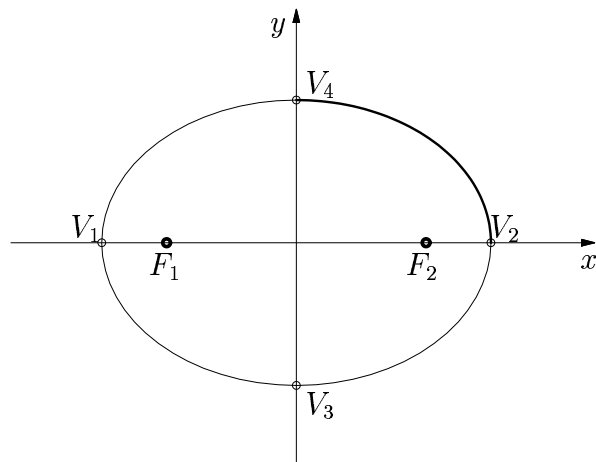
1.3 Elipsės formos tyrimas

Kadangi

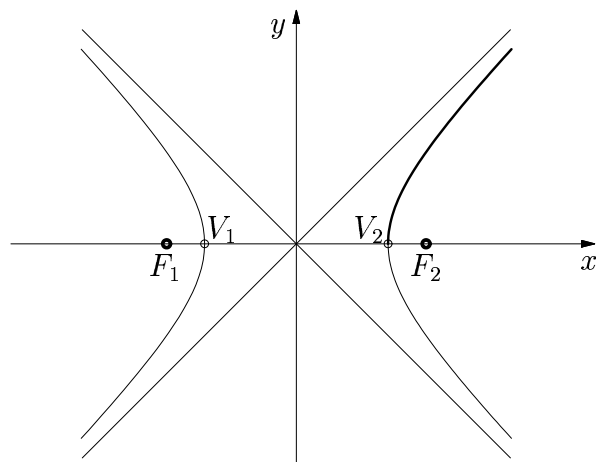
$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

taškas $M'(-x, y)$, simetriškas elipsės taškui $M(x, y)$ atžvilgiu y ašies, taip pat priklauso elipsei. Analogiškai gauname, kad x ašis irgi yra elipsės simetrijos ašis, o koordinatinių pradžia – elipsės simetrijos centras. Taigi užtenka iširti elipsės formą pirmajame ketvirtyje. Jame elipsė yra funkcijos $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ grafikas. Jo forma tiriama pasitelkus išvestines. Tyrimo rezultatą matote Pav.1.3.

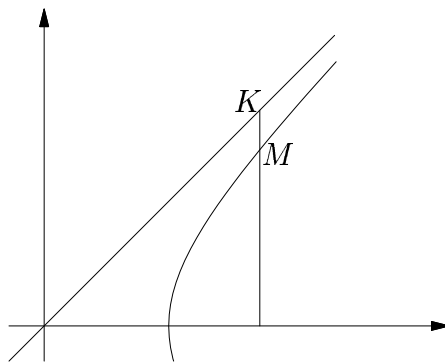
Taškai $V_1 = (-a; 0)$, $V_2 = (a; 0)$, $V_3 = (0; -b)$, $V_4 = (0; b)$ vadinami elipsės *viršūnėmis*. Atkarpa V_1V_2 yra elipsės *didžioji* ašis, o V_3V_4 – *mažoji* ašis.



Pav. 1.3: Elipsē ir jos viršūnēs



Pav. 1.4: Hiperbolēs viršūnēs ir asimptotēs



Pav. 1.5: Artėjimas prie asimptotės

1.4 Hiperbolės formos tyrimas; asimptotės

Kaip ir elipsės atveju, įrodome, kad x ir y yra hiperbolės simetrijos ašys, o koordinatinių pradžia – simetrijos centras. Todėl užtenka ištirti hiperbolės formą pirmajame ketvirtyje. Jame hiperbolė yra funkcijos $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ grafikas. Jo forma tiriama naudojant išvestines. Tyrimo rezultatai matote Pav. 1.4.

Taškai $V_1 = (-a; 0)$, $V_2 = (a; 0)$ vadinami hiperbolės *viršūnėmis*. Atkarpa V_1V_2 yra hiperbolės *realioji* ašis.

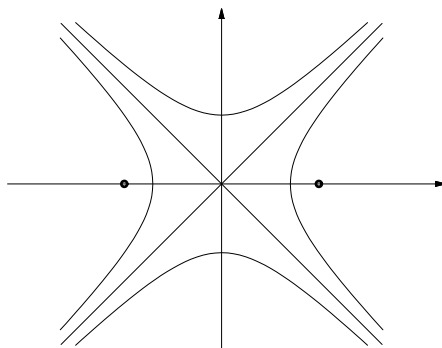
Atidesnis studentas tur būt pajuto, kad Pav. 1.4 yra informacijos, kurios sekdami tik išvestinių ženklus, negautume – hiperbolė, "keliaudama į begalybę", artėja prie dviejų tiesių. Formuluojuame šią savybę tiksliau.

Apibrėžimas 3 *Hiperbolės asimptotėmis vadinamos tiesės, kurių lygtys kanoninėje koordinatinių sistemoje yra $y = \frac{b}{a}x$ ir $y = -\frac{b}{a}x$.*

Pažymėkime M ir K atitinkamai hiperbolės bei asimptotės taškus pirmajame ketvirtyje, kurių pirmoji koordinatė yra x (žr. Pav. 1.5). Kadangi $M = (x; \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2})$, $K = (x, \frac{b}{a}x)$ ir $\sqrt{x^2 - a^2} < x$, taškas M yra žemiau asimptotės $y = \frac{b}{a}x$. Be to

$$|MK| = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Todel $|MK|$ monotoniškai artėja į 0.



Pav. 1.6: Hiperbolė ir jai jungtinė.

1.5 Jungtinė hiperbolė

Hiperbolė, *jungtinė* hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, apibrėžiama lygtimi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Jungtinės hiperbolės asimptotės sutampa su originalios hiperbolės asimptotėmis (žr. Pav. 1.6). Tai įrodoma labai paprastai. Nepraleiskite šio įrodymo, nes jame naudojamas koordinačių ašių sukeitimo principas labai pravers sprendžiant daugelį uždavinių.

Irodymas. Padauginę jungtinės hiperbolės lygtį iš -1 ir pažymėję $x = y'$, $y = x'$ gauname

$$\frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1.$$

Ši lygtis yra jungtinės hiperbolės kanoninė lygtis *kanoninėje* koordinačių sistemoje $x'y'$. Todėl jos asimptotės nusakomos lygtimis $y' = \pm \frac{a}{b}x'$. Grįžus į xy koordinačių sistemą šios lygtys įgyja pavidalą $y = \pm \frac{b}{a}x$.

1.6 Hiperbolės asimptotinė lygtis

Kadangi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

hiperbolės lygtį $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ galime parašyti pavidale $L_1 L_2 = k$, kur $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ yra asimptočių lygtys, o k – nenulinė konstanta. Šią asimptotinę hiperbolės lygties formą vartojame, kai žinome hiperbolės asimptotes. Konstantą k randame naudodami papildomą uždavinio sąlygą.

1.7 Kreivės taško atstumai iki židinių

Tarkime plokštumos taško $M(x; y)$ koordinatės tenkina elipsės arba hiperbolės kanoninę lygtį. Parodysime, kad taškas M priklauso elipsei arba hiperbolei.

Pradžioje suskaičiuojame atstumą $r_1 = |F_1 M|$. Tai darome vienu metu abiem kreivėms (viršutinis ženklas elipsės lygties atveju, apatinis – hiperbolės). Kadangi

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x + c)^2 + y^2 = x^2 + 2xc + c^2 \mp \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = \frac{a^2 \mp b^2}{a^2}x^2 + 2xc + c^2 \pm b^2, \\ &= e^2 + 2xea + a^2 = (ex + a)^2, \end{aligned}$$

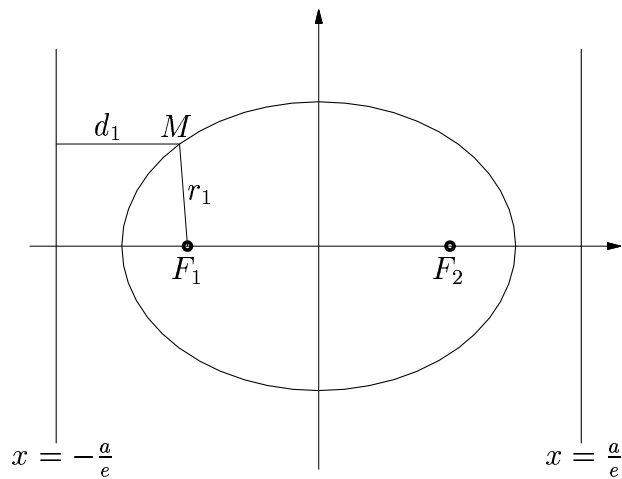
$r_1 = |ex + a|$. Panašiai gauname $r_2 = |ex - a|$.

- *Elipsės lygties atvejis.* Kadangi $e < 1$ ir $-a \leq x \leq a$, tai $r_1 = ex + a$, $r_2 = a - ex$. Todėl $r_1 + r_2 = 2a$.
- *Hiperbolės lygties atvejis.* Šiuo atveju $e > 1$.
 - (1) Jei $x \geq a$, tai $r_1 = ex + a$, $r_2 = ex - a$. Todėl $r_1 - r_2 = 2a$.
 - (2) Jei $x \leq -a$, tai $r_1 = -ex - a$, $r_2 = -ex + a$. Todėl $r_1 - r_2 = -2a$.

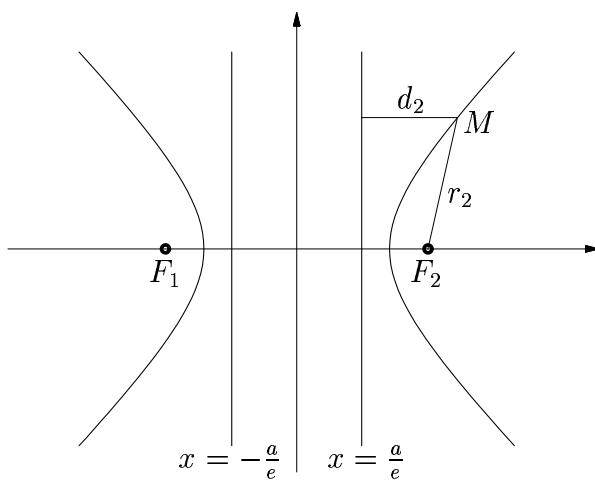
1.8 Elipsės ir hiperbolės direktrės

Apibrėžimas 4 *Elipsės (hiperbolės) direktrise, atitinkančia židinį $F_1(-c; 0)$, vadinama tiesė, apibrėžiama lygtimi $x = -\frac{a}{e}$; direktrise, atitinkančia židinį $F_2(c; 0)$, vadinama tiesė, apibrėžiama lygtimi $x = \frac{a}{e}$.*

Kadangi apskritimo $e = 0$, jis direktrisių neturi (*moralas* – matematikoje, kaip ir daugelyje kitų gyvenimo sričių, nevisada naudinga būti labai apskritam). Elipsės bei hiperbolės direktrės pavaizduotos Pav. 1.7, 1.8.



Pav. 1.7: Elipsė ir jos direktrisės



Pav. 1.8: Hiperbolė ir jos direktrisės

Teiginys 1 *Bet kokiam elipsės (hiperbolės) taškui M atstumo iki židinio santykis su atstumu iki tą židinį atitinkančios direktrės yra lygus ekscentricitetui e .*

Irodymas. Kreivės taško $M(x; y)$ atstumą iki židinio F_1 žymime r_1 . Preitame skyrelyje įrodėme, kad $r_1 = |ex + a|$. Taško M atstumą iki F_1 atitinkančios direktrės $x = -\frac{a}{e}$ pažymėkime d_1 . Kadangi $d_1 = |x + \frac{a}{e}|$, gauname

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{|ex + a|}{|x + \frac{a}{e}|} = \frac{|ex + a|}{\frac{1}{e}|ex + a|} = e.$$

Kitam židiniui F_2 panašiai gauname $\frac{r_2}{d_2} = e$.

Nesunkiai įrodomas ir atvirkštinis teiginys. Įrodymą praleidžiame, nors patį teiginį naudosome sprendžiant uždavinius.

Atvirkštinis teiginys 1 *Tarkime plokštumoje yra fiksuotas taškas F bei tiesė, neinanti per šį tašką. Taip pat yra fiksuotas teigiamas skaičius e . Bet kokiam plokštumos taškui M atstumą iki taško F pažymėkime r , o atstumą iki fiksuotos tiesės pažymėkime d . Plokštumos taškai, kuriems $\frac{r}{d} = e$ sudaro*

- elipsę, jei $e < 1$;
- hiperbolę, jei $e > 1$.

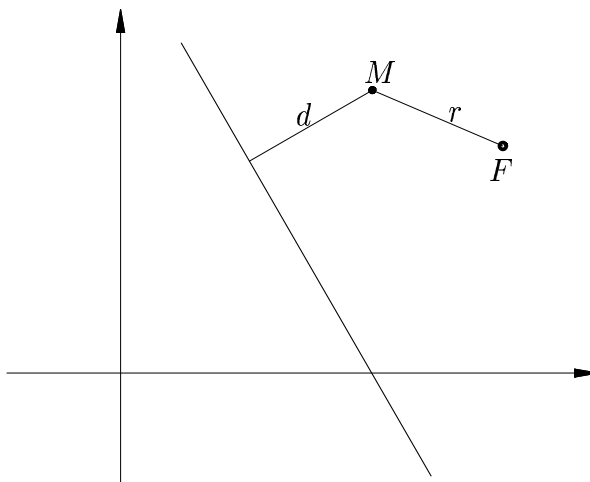
Be to, taškas F yra vienas iš kreivės židinių, fiksuota tiesė – tą židinį atitinkanti direktrisė, o teigiamas skaičius e – kreivės ekscentricitetas.

1.9 Parabolės apibrėžimas bei kanoninė lygtis

Plokštumoje fiksuojamas taškas F , kuris vadinamas židiniu. Taip pat fiksuojama tiesė, neinanti per židinį F . Ši tiesė vadinama direktrise.

Apibrėžimas 5 *Parabole vadinama aibė plokštumos taškų, vienodai nutolusių nuo židinio bei direktrės.*

Bet kokiam plokštumos taškui M atstumą iki židinio F žymime r , o atstumą iki direktrės žymime d (žr. Pav. 1.9). Parabolę sudaro taškai M , kuriems $r = d$. Parašę šią sąlygą pavidale $\frac{r}{d} = 1$ bei turėdami omenyje Teiginį 1, parabolės ekscentricitetu galime deklaruoti skaičių 1.



Pav. 1.9: Parabolės apibrėžimas

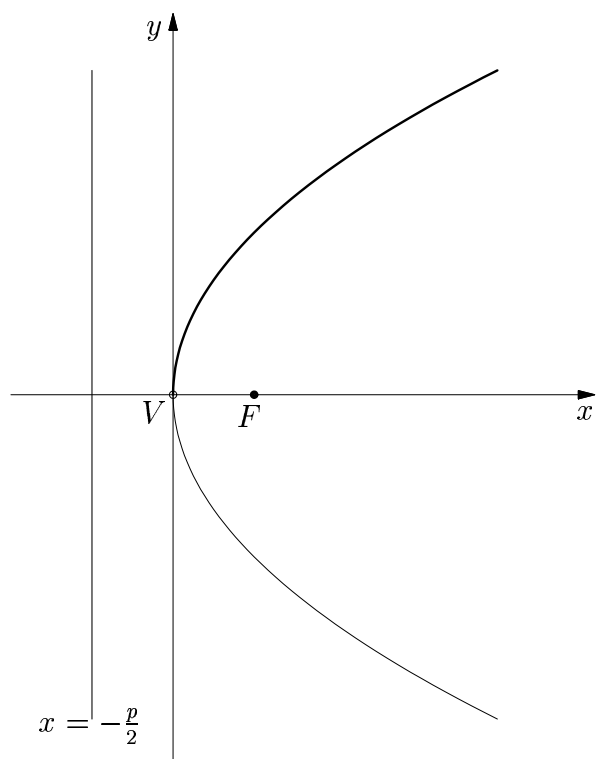
Parabolės kanoninė koordinatinių sistema sudaroma gana paprastai – x -ašis yra tiesė, einanti per židinį F bei statmena direktrisei. x -ašies teigiama kryptis – nuo direktrės link židinio. y -ašis yra statmena x -ašiai ir dalija atkarpą tarp židinio bei direktrės pusiau (žr. Pav. 1.10).

Pažymėkime atstumą tarp židinio bei direktrės raide p ($p > 0$). Gauname, kad kanoninėje koordinatinių sistemoje $F(\frac{p}{2}; 0)$, o direktrės lygtis yra $x = -\frac{p}{2}$. Todėl taškui $M(x; y)$ turime $r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, $d = |x + \frac{p}{2}|$. Pakėlę sąlygą $r = d$ kvadratu, po kelių aritmetinių veiksmų gauname parabolės kanoninę lygtį

$$y^2 = 2px.$$

Visi paminėti veiksmai yra nesudėtingi. Todėl, atliekant veiksmus atvirkščia tvarka, lengva patikrinti, kad taškas, kurio koordinatės tenkina lygtį (1.9), priklauso parabolei.

Panašiai, kaip elipsės ar hiperbolės atveju, gauname, kad x -ašis yra parabolės simetrijos ašis. Todėl parabolės formą tiriamo tik pirmame ketvirtyje, kur ji yra funkcijos $y = \sqrt{2px}$ grafikas. Tyrimo rezultata matote Pav. 1.10. Tai gerai iš mokyklos laikų žinomas kvadratinio trinomio grafikas, pasuktas 90 laipsnių. Taškas V , kuriame simetrijos ašis kerta parabolę, vadinamas parabolės *viršūne*.



Pav. 1.10: Kanoninė parabolės koordinatinių sistema



Pav. 1.11: Kreivės liestinė

1.10 Kreivės liestinė

Kreivės liestine taške A vadiname kirstinių AM ribinę padėtį taškui M artėjant į A (žr. Pav. 1.11). Šis apibrėžimas pasufleruoja paprastą liestinių lygčių radimo būdą:

- randamas kirstinės AM krypties koeficientas m ;
- ieškoma krypties koeficiento m riba m_{rib} , kai M artėja į A ;
- liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtis parašoma pavidale

$$y - y_0 = m_{rib}(x - x_0)$$

ir, kiek įmanoma, suprastinama.

1.11 Elipsės ir hiperbolės liestinės

Elipsės ir hiperbolės lygtį parašome pavidale $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$. Elipsės atveju: $p = a^2$, $q = b^2$; hiperbolės atveju: $p = a^2$, $q = -b^2$. Kreivės liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtį ieškome naudodami ką tik pateiktą schemą. Gretimo taško M koordinatas pažymime $(x_1; y_1)$.

- Kirstinės AM krypties koeficientas m yra lygus $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Taškai A ir M priklauso kreivei, todėl

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q} &= 1, \\ \frac{x_1^2}{p} + \frac{y_1^2}{q} &= 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Atėmę iš antrosios lygties pirmąją gauname

$$m = -\frac{q x_1 + x_0}{p y_1 + y_0}.$$

- Iš šios m išraiškos seka, kad

$$\lim_{M \rightarrow A} m = -\frac{q x_0}{p y_0}.$$

- Lygtį

$$y - y_0 = -\frac{q x_0}{p y_0}(x - x_0)$$

parašome pavidale

$$\frac{x_0 x}{p} + \frac{y_0 y}{q} = \frac{x_0^2}{p} + \frac{y_0^2}{q}.$$

Pasinaudoję pirmąja (1.6) lygybe, gauname liestinės lygtį

$$\frac{x_0 x}{p} + \frac{y_0 y}{q} = 1. \quad (1.7)$$

Elipsės liestinės lygtis yra

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1; \quad (1.8)$$

hiperbolės liestinės lygtis yra

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (1.9)$$

1.12 Parabolės liestinės

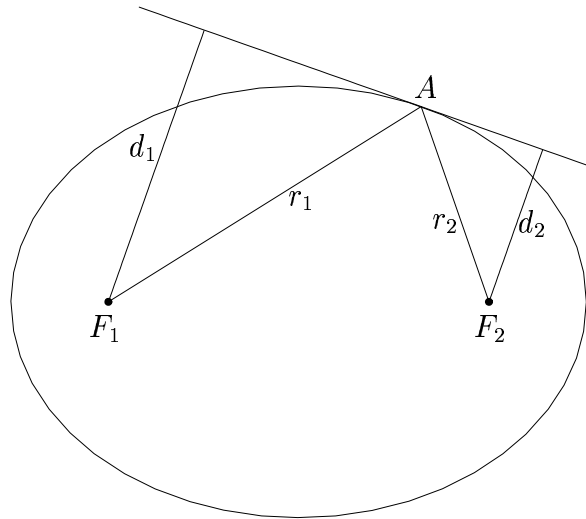
Parabolės liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtį ieškome naudodami tą pačią schemą. Gretimo taško M koordinatės pažymime $(x_1; y_1)$.

- Kirstinės AM krypties koeficientas m yra lygus $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Taškai A ir M priklauso parabolei, todėl

$$\begin{aligned} y_0^2 &= 2p x_0, \\ y_1^2 &= 2p x_1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Atėmę iš antrosios lygties pirmąją gauname

$$m = \frac{2p}{y_1 + y_0}.$$



Pav. 1.12: Elipsės (liestinės) optinė savybė

- Iš šios m išraiškos seka, kad

$$\lim_{M \rightarrow A} m = \frac{p}{y_0}.$$

- Lygtį

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

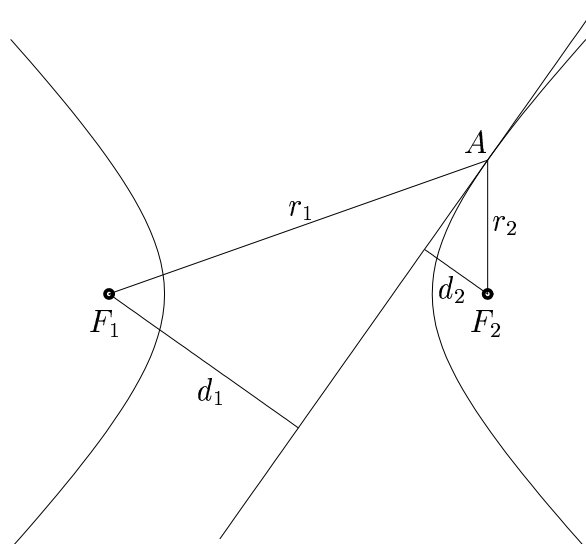
parašome pavidale

$$y_0 y - y_0^2 = p x - p x_0.$$

Pasinaudoję pirmąja (1.10) lygybe, gauname liestinės lygtį

$$y_0 y = p(x + x_0). \quad (1.11)$$

Atkreipkite dėmesį, kad nenaudojome sąlygos $p > 0$ – parabolė gali būti nukreipta ir "kairėn". Jei parabolės lygtis yra $x^2 = 2py$ – "mokyklinis" atvejis, kai parabolė nukreipta "aukštyn" arba "žemyn" – liestinės lygtis parabolės taške $A(x_0; y_0)$ yra $x_0 x = p(y + y_0)$ (įrodoma analogiškai).



Pav. 1.13: Hiperbolės (liestinės) optinė savybė

1.13 Elipsės ir hiperbolės optinės savybės

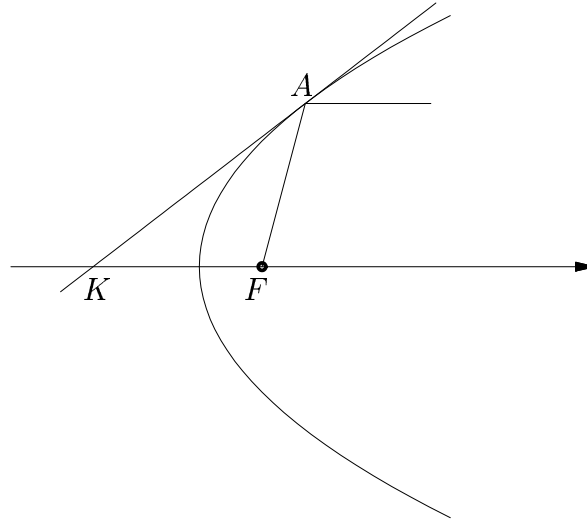
Teiginys 2 *Bet kokiam elipsės (hiperbolės) taškui A atkarpos F_1A ir F_2A sudaro lygius kampus su liestine taške A .*

Irodymas. Įrodysime, kad šių kampų sinusai lygūs, t.y. $\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$ (žr. Pav. 1.12, 1.13). Skaičiant atstumus nuo židinių $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ iki liestinės $\frac{x_0x}{a^2} \pm \frac{y_0y}{b^2} = 1$ taške $A(x_0; y_0)$, panaudoję $c = ea$, gauname

$$d_1 = \frac{\left| -\frac{x_0c}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|ex_0 + a|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}},$$

$$d_2 = \frac{\left| \frac{x_0c}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}} = \frac{|ex_0 - a|}{a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Kadangi $r_1 = |ex_0 + a|$, $r_2 = |ex_0 - a|$, lygybė $\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$ nekelia abejonių.



Pav. 1.14: Parabolės (liestinės) optinė savybė

1.14 Parabolės optinės savybės

Teiginys 3 *Bet kokiam parabolės taškui A atkarpa FA ir simetrijos ašis sudaro lygius kampus su liestine taške A .*

Irodymas. Liestinės taške $A(x_0; y_0)$ sankirtą su simetrijos ašimi x pažymėkime K (žr. Pav. 1.14). Įrodysime, kad $|AF| = |KF|$.

Liestinės $y_0y = p(x + x_0)$ ir x -ašies $y = 0$ sankirta yra taškas $K(-x_0; 0)$. Jo atstumas iki židinio $F(\frac{p}{2}; 0)$ yra $x_0 + \frac{p}{2}$. Kadangi $|AF|$ lygus atstumui nuo A iki direktrės $x = -\frac{p}{2}$, gauname $|AF| = x_0 + \frac{p}{2}$. Todėl $|AF| = |KF|$.

1.15 Pratimai bei uždaviniai

Skyrių baigiame charakteringų šios dalies uždavinių rinkiniu.

1. Rasti elipsės kanoninę lygtį, jei atstumas tarp židinių 6, o atstumas tarp direktrisių $16\frac{2}{3}$.
2. Rasti hiperbolės kanoninę lygtį, jei asimptočių lygtys yra $y = \pm\frac{4}{3}x$, o atstumas tarp direktrisių $6\frac{2}{5}$.

3. Elipsės židiniai yra $(1; 3)$ ir $(3, 1)$, o ekscentricitetas lygus $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Rasti jos:
I) lygtį;
II) kanoninę lygtį.
4. Elipsės židiny yra $(3; 0)$, o jį atitinkanti direktrisė $x + y - 1 = 0$. Rasti elipsės lygtį, jei jos ekscentricitetas lygus $\frac{1}{2}$.
5. Rasti elipsės $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ židinius ir juos atitinkančias direktrises.
6. Rasti elipsės $9x^2 + 5y^2 - 18x - 30y + 9 = 0$ židinius ir juos atitinkančias direktrises.
7. Rasti parabolės $x = 2y^2 - 12y + 14$ židinį ir direktrisę.
8. Rasti hiperbolės lygtį, jei žinomos jos asimptotės $x - y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ bei jos taškas $(3; 1)$.
9. Rasti kreivės kanoninę lygtį, jei simetrijos ašys sutampa su koordinatinėmis ašimis ir ji eina per taškus $(1; -2)$, $(2; 3)$.
10. Rasti elipsės $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ liestines, lygiagrečias tiesei $4x - 2y + 23 = 0$.
11. Rasti hiperbolės $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$ tašką artimiausią tiesei $3x + 2y + 1 = 0$.
12. Rasti parabolės $y^2 = 5x$ liestines, išvestas per tašką $(5; 9)$.
13. Parabolė $y^2 = 2px$ liečia tiesę $x - 2y + 4 = 0$. Rasti jos lygtį.
14. Elipsės simetrijos ašys sutampa su koordinatinėmis ašimis. Elipsė eina per tašką $(4; -1)$ ir liečia tiesę $x + 4y - 10 = 0$. Rasti jos lygtį.
14. Kreivės simetrijos ašys sutampa su koordinatinėmis ašimis. Žinomos dvi jos liestinės $3x - 2y - 20 = 0$, $x + 6y - 20 = 0$. Rasti kreivės lygtį.
15. Elipsės židiniai yra $(-3; 0)$, $(3; 0)$. Žinoma jos liestinė $x - y - 5 = 0$. Rasti elipsės lygtį.

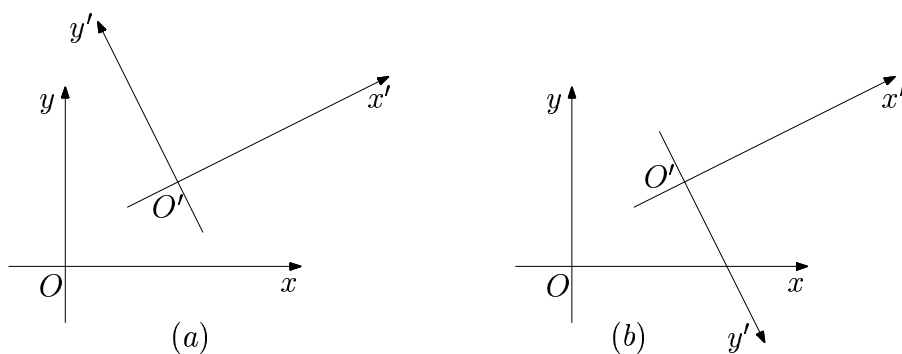
Dalis 2

Antros eilės kreivės

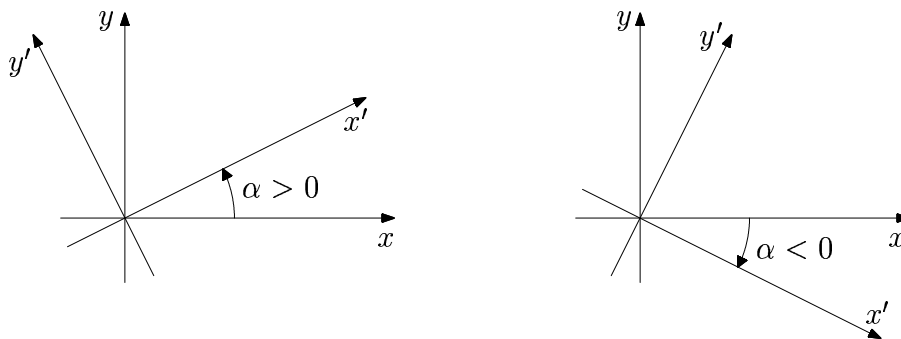
2.1 Koordinačių sistemos transformacija

Antrosios eilės kreivių lygtis prastinsime keisdami (transformuodami) koordinačių sistemą. Prisiminkime svarbiausius plokštumos stačiakampių koordinačių sistemų transformacijos momentus.

Apibrėžimas 6 *Koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra vienos orientacijos, jei posūkis nuo x' -ašies link y' -ašies yra tos pačios krypties kaip ir posūkis nuo x -ašies link y -ašies (žr. Pav. 2.1 (a)). Priešingu atveju (žr. Pav. 2.1 (b)), koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra priešingos orientacijos.*



Pav. 2.1: Vienodai (a) ir skirtingai (b) orientuotos koordinačių sistemos.



Pav. 2.2: Orentuotas posūčio kampas.

Taip pat svarbu nepamiršti, kad posūčio kampas yra orientuotas – jo absoliutinė reikšmė imama su ženklu + arba –.

Apibrėžimas 7 Jei pradinės koordinačių sistemos Oxy x -ašies posūkis link naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ x' -ašies yra tos pačios krypties, kaip ir posūkis nuo x -ašies link y -ašies, tai posūčio kampas α yra teigiamas; priešingu atveju posūčio kampas yra neigiamas. (Žr. Pav. 2.2).

Dėmesio: nustatant posūčio kampo ženklą, naujos koordinačių sistemos y' -ašies kryptis nevaidina jokio vaidmens.

Bendrają koordinačių sistemos transformaciją (žr. Pav. 2.3) dažnai yra patogiau suskaidyti į du etapus – koordinačių sistemos posūkį ir koordinačių sistemos lygiagretų postūmį (žr. Pav. 2.4).

Dabar prisiminkime (sužinokime) koordinačių transformacijos formules.

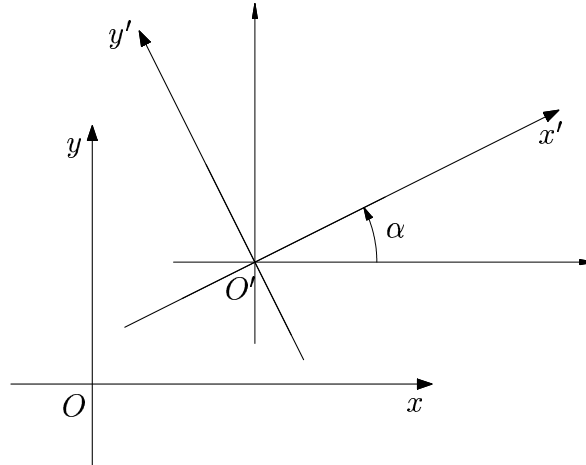
2.1.1 Bendrosios koordinačių transformacijos formulės

Tegul Oxy yra pradinė koordinačių sistema, o $O'x'y'$ – naujoji. Taško M koordinatės atžvilgiu pradinės sistemos yra $(x; y)$, atžvilgiu naujosios – $(x'; y')$. Įvedami duomenys yra atžvilgiu pradinės koordinačių sistemos:

naujosios koordinačių sistemos pradžia $O'(x_0; y_0)$;

α – orientuotas kampas, kuriuo reikia pasukti x -ašį kad gautume x' -ašį.

- Koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra vienos orientacijos



Pav. 2.3: Bendroji koordinačių sistemos transformacija.

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0 \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

- Koordinačių sistemos Oxy ir $O'x'y'$ yra priešingų orientacijų

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + x_0 \\ y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1.2 Koordinačių sistemos posūkis

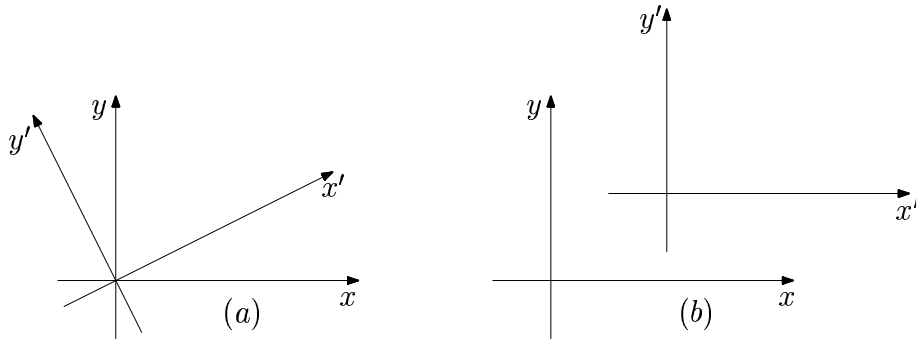
Žiūrėk Pav. 2.4(a).

Koordinačių sistemos yra vienos orientacijos, o jų pradžios sutampa ($O = O'$). Kadangi šiuo atveju $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, formulės (2.1) supaprastėja iki

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.3)$$

2.1.3 Koordinačių sistemos lygiagretus postūmis

Žiūrėk Pav. 2.4(b).



Pav. 2.4: Koordinačių sistemos posūkis (a) ir lygiagretus postūmis (b).

Koordinačių sistemų ašys yra tų pačių krypčių (todėl sistemos yra vienos orientacijos). Kadangi šiuo atveju $\alpha = 0$, formulės (2.1) supaprastėja iki

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.1.4 Matricinė koordinačių transformacijos formulių išraiška

Pažymėkime

$$\begin{aligned} c_{11} &= \cos \alpha & c_{12} &= \mp \sin \alpha & c_{13} &= x_0 \\ c_{21} &= \sin \alpha & c_{22} &= \pm \cos \alpha & c_{23} &= y_0 \\ c_{31} &= 0 & c_{32} &= 0 & c_{33} &= 1 \end{aligned}$$

viršutinis ženklas naudojamas, jei sistemos yra vienos orientacijos – formulė (2.1); apatinis ženklas naudojamas, jei sistemos priešingų orientacijų – formulė (2.2).

Pažymėkime

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Įvedus šiuos žymenis formulės (2.1) ir (2.2) matricinėje formoje tampa vienodomis:

$$X = CX' \quad (2.5)$$

Matriciniai žymenys įgalina panaudoti tiesinės algebros rezultatus ten, kur tiesioginiai aritmetiniai skaičiavimai tampa komplikuotais. Matricinė koordinačių transformacijų forma (2.5) plačiai vartojama kompiuterinėje grafikoje.

2.2 Bendroji antros eilės kreivės lygtis

Tarkime yra fiksuota stačiakampė koordinačių sistema Oxy . Bendroji antros eilės kreivės lygtis $F(x, y) = 0$ šios sistemos atžvilgiu yra

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (2.6)$$

Remiantis bendrąja kreivės lygtimi sudaroma jos matrica A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

apibrėžiant $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$. Matrica A yra simetrinė, t.y. $A^T = A$. Panaudojus skyriaus 2.1.4 žymenis gaunama matricinė antros eilės kreivės lygties forma

$$F(x, y) = X^T A X = 0. \quad (2.7)$$

Ši lygybė įrodoma elementariais skaičiavimais dauginant matricas. Panašaus sudėtingumo (tiksliau lengvumo) aritmetiniais veiksmais įrodoma, kad

$$F(x, y) = xF_1(x, y) + yF_2(x, y) + F_3(x, y), \quad (2.8)$$

kur

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ F_2(x, y) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ F_3(x, y) &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Išraiška $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ paprastai vadinama kvadratine kreivės lygties dalimi, $2a_{13}x + 2a_{23}y$ – tiesine dalimi, o a_{33} – laisvuojū nariu.

2.2.1 Ryšys tarp kreivės lygčių atžvilgiu skirtingų koordinačių sistemų

Tarkime turime antros eilės kreivės lygtį atžvilgiu koordinačių sistemos Oxy . Kreivės lygtį $F'(x', y') = X'^T A' X' = 0$ atžvilgiu naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ gauname iš (2.7), pasinaudoję koordinačių transformacijų formulėmis (2.5):

$$F'(x', y') = (CX')^T A (CX') = X'^T (C^T AC) X' = X'^T A' X'.$$

Kadangi matricos A' ir $C^T AC$ yra simetrinės $\left((C^T AC)^T = C^T A^T C = C^T AC \right)$, iš paskutinės lygybės seka

$$A' = C^T AC \quad (2.10)$$

- *Koordinačių sistemos posūkis.* Pritaikę formulę (2.10) koordinačių sistemos posūkiui gauname:

1. jei tiesinė lygties dalis buvo lygi 0, tai ir po posūkio ji išlieka lygi 0;
2. laisvasis narys nesikeičia, t.y. $a'_{33} = a_{33}$.

- *Lygiagrečios postūmis.* Pritaikę formulę (2.10) lygiagrečiam koordinačių sistemos postūmiui gauname:

1. kvadratinė lygties dalis nesikeičia, t.y. $a'_{11} = a_{11}$, $a'_{12} = a_{12}$, $a'_{22} = a_{22}$;
2. tiesinės dalies kaita nusakoma formulėmis

$$\begin{aligned} a'_{13} &= F_1(x_0, y_0) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} \\ a'_{23} &= F_2(x_0, y_0) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. $a'_{33} = F(x_0, y_0)$.

2.3 Antros eilės kreivės lygties invariantai

Efektyviai prastinant antros eilės kreivės lygtį labai svarbūs yra lygties *ortogonalūs invariantai*.

Apibrėžimas 8 *Antros eilės kreivės lygties ortogonaliojo invariantu vadinama nuo lygties koeficientų priklausanti funkcija g , kurios reikšmė nesikeičia, stačiakampę koordinačių sistemą Oxy pakeitus kita stačiakampe koordinačių sistema $O'x'y'$, t.y.*

$$g(a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}) = g(a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{13}, a'_{23}, a'_{33}).$$

Teiginys 4 *Reiškiniai*

$$I_1 = a_{11} + a_{22} \quad , \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

yra ortogonalūs antros eilės kreivės lygties invariantai.

Šis teiginys įrodomas tiesinės algebros kurse. Beje, reiškinių $I_3 = |A|$ invariantiškumas seka iš formulės (2.10):

$$|A'| = |C^T A C| = |A| |C|^2 = |A|,$$

nes $|C| = \pm 1$.

2.4 Charakteringoji lygtis

Apibrėžimas 9 *Antros eilės kreivės charakteringąja lygtimi vadinama antrojo laipsnio lygtis*

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = 0. \quad (2.13)$$

Lengva patikrinti, kad charakteringąją lygtį galime užrašyti matricinėje formoje

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2.14)$$

Teiginys 5 *Charakteringoji lygtis visuomet turi realias šaknis.*

Įrodymas Skaičiuojame charakteringosios lygties diskriminantą D :

$$D = I_1^2 - 4I_2 = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0.$$

Taip pat gauname, kad charakteringoji lygtis turi kartotinę šaknį ($D = 0$), jei $a_{11} = a_{22}$ ir $a_{12} = 0$. Nesunkiai patikrinama (išskiriant lygtyje pilnus kvadratus atžvilgiu x ir y), kad šiuo atveju, jei kreivė turi realius taškus, lygtis apibrėžia apskritimą.

Charakteringosios lygties šaknis žymime λ_1, λ_2 . Kadangi jos visuomet realios, tai

$$\lambda^2 - I_1 \lambda + I_2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

o pagal Vijeto teoremą

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad I_2 = \lambda_1 \lambda_2.$$

2.5 Antros eilės kreivės centras

Apibrėžimas 10 Antros eilės kreivės centru vadinamas taškas, kurio koordinatės $(x; y)$ tenkina lygčių sistemą

$$\begin{cases} F_1(x, y) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ F_2(x, y) = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Apibrėžimas 11 Antros eilės kreivė vadinama centrine, jei ji turi vienintelį centrą. Priešingu atveju – kreivė neturi centro arba turi jų be galo daug – antros eilės kreivė vadinama necentrine.

Sistema (2.15) turi vienintelį sprendinį, jei $I_2 \neq 0$. Todėl, jei $I_2 \neq 0$ kreivė yra centrinė, jei $I_2 = 0$ – necentrinė.

Teiginys 6 Jei koordinačių sistemos pradžia sutampa su kreivės centru, tai kreivės lygties tiesinė dalis yra lygi nuliui.

Irodymas Iš centro apibrėžimo bei formulės (2.11) seka, kad perkėlus koordinačių sistemos pradžia į kreivės centrą, jos tiesinė dalis virsta nuliumi. Bet kuri kita koordinačių sistema su tuo pačiu centru gaunama iš šios (lygiagrečiai pastumtos) sistemos pasukant apie naują koordinačių pradžia. Iš skyriaus 2.2.1 punkto o 1 seka, kad tiesinė lygties dalis atžvilgiu pasuktos koordinačių sistemos lieka lygi nuliui.

Remdamiesi šiuo teiginiu darome išvadą: jei koordinačių sistemos pradžia sutampa su kreivės centru, tai

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0.$$

Tokioje koordinačių sistemoje $F(-x; -y) = F(x; y)$, todėl: *kreivės centras yra kreivės simetrijos centras*.

2.6 Kvadratinės lygties dalies prastinimas

Šiame skyriuje įrodysime, kad pasukus koordinačių sistemą galima panaikinti skirtingų kintamųjų sandaugą ($a'_{12} = 0$). Be to iš įrodymo išpešime papildomos naudingos informacijos.

Kadangi koordinačių transformacijai naudojame posūkį, tai

$$C = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pasinaudoję formule (2.10) gauname

$$a'_{21} = -\sin \alpha \left(\underbrace{a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha}_{n_1} \right) + \cos \alpha \left(\underbrace{a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha}_{n_2} \right).$$

Sąlyga, kad pranyksta skirtingų kintamųjų sandauga, t.y. $a'_{12} = a'_{21} = 0$, yra

$$-n_1 \sin \alpha + n_2 \cos \alpha = 0.$$

Ši sąlyga reiškia, kad vektorius $(n_1; n_2)$ yra statmenas vektoriui $(-\sin \alpha; \cos \alpha)$. Tai ekvivalentu sąlygai, kad vektorius $(n_1; n_2)$ yra lygiagretus vektoriui $(\cos \alpha; \sin \alpha)$, t.y. \exists toks skaičius λ , kad

$$\begin{cases} a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = \lambda \cos \alpha \\ a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha = \lambda \sin \alpha. \end{cases}$$

Šią sąlygą perrašome pavidale

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha = 0 \\ a_{21} \cos \alpha + (a_{22} - \lambda) \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Sistema (2.16) turi *nenulini* sprendinį $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, jei

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Taigi λ yra charakteringosios lygties šaknis. Pažymėję šią šaknį λ_1 iš sąlygos (2.16) pirmosios lygybės gauname

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}. \quad (2.17)$$

Primename vakarykščiams mokiniams, kad žinodami tangentą nesunkiai apskaičiuojame to paties kampo sinusą ir kosinusą:

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}. \quad (2.18)$$

Pasinaudoję formule (2.10) taip pat gauname

$$a'_{11} = \cos \alpha \left(\underbrace{a_{11} \cos \alpha + a_{12} \sin \alpha}_{n_1} \right) + \sin \alpha \left(\underbrace{a_{21} \cos \alpha + a_{22} \sin \alpha}_{n_2} \right).$$

Kadangi $n_1 = \lambda_1 \cos \alpha$, $n_2 = \lambda_1 \sin \alpha$, tai $a'_{11} = \lambda_1 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \lambda_1$. Todėl charakteringoji lygtis, parašyta matriciniame pavidale atžvilgiu naujos koordinačių sistemos, yra

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - a'_{22}) = 0.$$

Iš šios lygybės gauname, kad a'_{22} yra kita charakteringosios lygties šaknis, t.y. $a'_{22} = \lambda_2$.

Tai ir viskas, ką reikėjo parodyti šiame skyriuje. Surinkime viščiukus į vieną vietą.

Išvada 1 Tegul λ_1 ir λ_2 yra charakteringosios lygties šaknys. Pasukus koordinačių sistemą kampu α , kurio

$$\tan \alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}},$$

kvadratinė lygties dalis atžvilgiu naujos koordinačių sistemos supaprastėja iki $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, t.y. $a'_{11} = \lambda_1$, $a'_{12} = 0$, $a'_{22} = \lambda_2$. Posūkio kampo sinusas ir kosinusas apskaičiuojami naudojantis formulėmis (2.18).

2.7 Centrinų kreivių kanoninės lygtys

2.7.1 Bendroji dalis

Kadangi kreivė centrinė, tai $I_2 \neq 0$. Todėl abi charakteringosios lygties šaknys λ_1 , λ_2 nelygios 0, nes $I_2 = \lambda_1 \lambda_2$.

Pradžioje lygiagrečiu postūmiu perkeliame koordinačių sistemos pradžią į kreivės centrą $(x_0; y_0)$. Kreivės lygties tiesinė dalis virsta 0. Po to, remiantis Išvada 1, supaprastiname lygties kvadratinę dalį. Po šių operacijų kreivės lygtis atžvilgiu naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ supaprastėja iki

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + a'_{33} = 0.$$

Kadangi

$$I_3 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 a'_{33} = I_2 a'_{33},$$

gauname kad $a'_{33} = I_3/I_2$. Tai reiškia, kad centrinės kreivės lygtį visuomet galime parašyti pavidale

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0. \quad (2.19)$$

Šis lygties pavidalas labai svarbus – ir užmiršę tolimesnes lygties pavidalo keitimo detales, sprendami konkretų uždavinį gausite teisingą atsakymą, jei naudositės lygtimi (2.19) bei žinosite kreivės tipą (ir neprivelsite aritmetinių klaidų).

2.7.2 Įvairūs atvejai

$$I_2 > 0$$

Šiuo atveju charakteringosios lygties šaknys yra vieno ženklo. Šaknimi λ_1 pasirenkame tą, kuri absoliutiniu dydžiu yra mažesnė. Kadangi $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$, šaknų ženklas sutampa su I_1 ženklu.

(I) $I_3 \neq 0$; I_3 ir I_1 skirtingų ženklų.

Laivąjį narį I_3/I_2 perkeliame į dešinę pusę ir dalijame gautąją lygtį iš $(-I_3/I_2)$. Gauname

$$\frac{x'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{y'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}} = 1.$$

Pažymėję

$$-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} = a^2, \quad -\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} = b^2,$$

turime elipsės kanoninę lygtį

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

nes $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \Rightarrow a^2 \geq b^2$.

(II) $I_3 \neq 0$; I_3 ir I_1 vienodų ženklų.

Po analogiškų aritmetinių manipuliacijų pažymime

$$-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} = -a^2, \quad -\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} = -b^2$$

ir gauname lygtį

$$-\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Šiuo atveju kreivė neturi realių taškų ir vadinama *menama elipse*.

(III) $I_3 = 0$.

Šiuo atveju lygtis (2.19) supaprastėja iki

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0.$$

Pažymėję $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_2 = b^2$, jei $I_1 > 0$ ir $\lambda_1 = -a^2$, $\lambda_2 = -b^2$, jei $I_1 < 0$ gauname lygtį

$$a^2 x'^2 + b^2 y'^2 = 0.$$

Ši kreivė turi vieną realų tašką – kreivės centrą – ir yra vadinama *pora menamų susikertančių tiesių* arba *išsigimusia elipse*.

$I_2 < 0$

Šiuo atveju charakteringosios lygties šaknys yra skirtingų ženklų. Šaknims λ_1 pasirenkame tą, kurios ženklas sutampa su I_3 ženklu (ir bet kurią, jei $I_3 = 0$).

(I) $I_3 \neq 0$

Laivąjį narį I_3/I_2 perkeliame į dešinę pusę ir dalijame gautąją lygtį iš $(-I_3/I_2)$. Gauname

$$\frac{x'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2}} + \frac{y'^2}{-\frac{I_3}{\lambda_2 I_2}} = 1.$$

Pažymėję

$$-\frac{I_3}{\lambda_1 I_2} = a^2, \quad -\frac{I_3}{\lambda_2 I_2} = -b^2,$$

turime hiperbolės kanoninę lygtį

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

(II) $I_3 = 0$

Šiuo atveju lygtis (2.19) supaprastėja iki

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = 0.$$

Pažymėję $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_2 = -b^2$, jei $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (atvirkščiai priešingu atveju) gauname lygtį

$$a^2 x'^2 - b^2 y'^2 = 0.$$

Kadangi $a^2 x'^2 - b^2 y'^2 = (ax' - by')(ax' + by')$, ši kreivė sudaryta iš dviejų susikertančių tiesių, todėl taip ir vadinama – *pora susikertančių tiesių*. Šios tiesės kertasi kreivės centre.

2.7.3 Elipsės ir hiperbolės kanoninės koordinačių sistemos radimas

Algoritmas kanoninei koordinačių sistemai rasti yra vienareikšmis (svarbu tik teisingai su-
numeruoti charakteringosios lygties šaknis).

(I) Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

randame kreivės centrą. Jis yra kanoninės koordinačių sistemos pradžia.

(II) Naudodamiesi formulėmis (2.17) ir (2.18) randame posūkio kampo sinusą ir kosinusą.

(III) Parašome koordinačių transformacijos formules.

2.8 Necentrinių kreivių kanoninės lygtys

2.8.1 Bendroji dalis

Kadangi kreivė necentrinė, tai $I_2 = 0$. Todėl viena charakteringosios lygties šaknis yra lygi 0, nes $I_2 = \lambda_1 \lambda_2$. Abi charakteringosios lygties šaknis negali būti lygios 0, nes remiantis Išvada 1 gautume, kad kreivės lygtis yra pirmojo laipsnio (prieštara). Pažymime $\lambda_1 = 0$. Todėl $\lambda_2 \neq 0$ ir $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = I_1$.

Pradžioje, remiantis Išvada 1, supaprastiname kvadratinę lygties dalį. Po šios operacijos kreivės lygtis atžvilgiu naujos koordinačių sistemos $O'x'y'$ supaprastėja iki

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \quad (2.20)$$

Toliau lygtį prastiname išskirdami pilną kvadratą:

$$I_1 y'^2 + 2a'_{23}y' = I_1 \left(y'^2 + 2\frac{a'_{23}}{I_1}y' + \frac{a'^2_{23}}{I_1^2} \right) - \frac{a'^2_{23}}{I_1}.$$

Lygtį (2.20) parašome pavidale

$$I_1 \left(y' + \frac{a'_{23}}{I_1} \right)^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} - \frac{a'^2_{23}}{I_1} = 0.$$

Pakeitę kintamuosius $x' = x''$, $y' + \frac{a'_{23}}{I_1} = y''$ (t.y. lygiagrečiai pastūmę koordinačių sistemą) kreivės lygtį supaprastiname iki

$$I_1 y''^2 + 2a''_{13}x'' + a''_{33} = 0.$$

Kadangi

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a''_{13} \\ 0 & I_1 & 0 \\ a''_{13} & 0 & a''_{33} \end{vmatrix} = -I_1 a''_{13}{}^2,$$

gauname

$$|a''_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}.$$

Išvada:

kreivės lygtis atžvilgiu tinkamai parinktos koordinačių sistemos $O'x'y'$ supaprastėja iki

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} = 0, \quad |a'_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}. \quad (2.21)$$

2.8.2 Įvairūs atvejai

$I_3 \neq 0$

Šiuo atveju $a'_{13} \neq 0$, todėl lygtį (2.21) galime parašyti pavidale

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13}\left(x' + \frac{a'_{33}}{a'_{13}}\right) = 0.$$

Atlikus keitimą (lygiagretų postūmį) $x' + \frac{a'_{33}}{a'_{13}} = x''$, $y' = y''$ ir atsisakius bereikalingų štrichų, kreivės lygtis supaprastėja iki

$$I_1 y''^2 + 2a'_{13}x'' = 0; \quad |a'_{13}| = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}. \quad (2.22)$$

Jei a'_{13} ir I_1 yra priešingų ženklų, viskas paruošta tolimesniems veiksams. Jei ne, tai pakeitę ašių kryptis, pakeičiame a'_{13} ženklą.

Baigiamieji veiksmai:

(i) perkeliame $2a'_{13}x''$ į kitą lygties pusę ir dalijame lygtį iš I_1 ;

(ii) kadangi a'_{13} ir I_1 yra priešingų ženklų, pasinaudoję sąlyga (2.22), kreivės lygtį parašome pavidale

$$y''^2 = 2px'', \quad p = \sqrt{-\frac{I_3}{I_1^3}}. \quad (2.23)$$

Šiuo atveju gauname parabolės kanoninę lygtį.

$$I_3 = 0$$

Šiuo atveju $a'_{13} = 0$. Lygtį (2.21), padaliję ją iš I_1 , parašome pavidale

$$y'^2 = \frac{-a'_{33}}{I_1}.$$

(I) a'_{33} ir I_1 priešingų ženklų.

Pažymėję $\frac{-a'_{33}}{I_1} = a^2$, gauname

$$y'^2 = a^2.$$

Kadangi $y'^2 - a^2 = (y' - a)(y' + a)$, kreivė yra sudaryta iš dviejų lygiagrečių tiesių, todėl taip ir vadinama – *pora lygiagrečių tiesių*.

(II) a'_{33} ir I_1 vienodu ženklų.

Pažymėję $\frac{-a'_{33}}{I_1} = -a^2$, gauname

$$y'^2 = -a^2.$$

Šiuo atveju kreivė neturi realių taškų ir vadinama *pora menamų lygiagrečių tiesių*.

(III) $a'_{33} = 0$.

Šiuo atveju turime lygtį

$$y'^2 = 0.$$

Kreivė yra sudaryta iš vienos tiesės, bet vadinama kiek kitaip – *dviguba tiesė*.

Pastaba 1 Tiek centrinės, tiek necentrinės kreivės atveju jos kanonine koordinatinių sistema vadiname tą koordinatinių sistemą, kurioje kreivės lygtis turi paprasčiausią – kanoninę – pavidalą. Bet praktiškai svarbu mokėti rasti tik senų pažistamų – elipsės, hiperbolės, parabolės – kanonines koordinatinių sistemas.

2.8.3 Necentrinės kreivės tipo nustatymas

Jei $I_2 = 0$ ir $I_3 \neq 0$, tai kreivė yra parabolė. Jei $I_2 = 0$ ir $I_3 = 0$, tai kreivės tipas priklauso nuo a'_{33} ženklo. Parodysime, kaip šiuo atveju efektyviai randamas a'_{33} .

Atžvilgiu kintamųjų x', y' sistema kreivės centrai rasti yra

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ I_1 y' = 0, \end{cases}$$

Gauname, kad kreivė turi be galo daug centrų.

Algoritmas

(I) Spręsdami sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \end{cases}$$

pasirenkame vieną iš daugelio kreivės centrų. Atliekame lygiagretų koordinačių sistemos postūmį, perkeldami koordinačių pradžią į pasirinktą kreivės centrą $(x_0; y_0)$. Naujas laisvasis narys yra $F(x_0, y_0)$, o lygties tiesinė dalis lygi 0.

(II) Remiantis Išvada 1 supaprastiname lygties kvadratinę dalį. Kreivės lygtis įgyja pavidalą

$$I_1 y'^2 + F(x_0, y_0) = 0.$$

2.9 Vienas pavyzdys

Žinant visus antros eilės kreivių tipus, kyla pagunda spręsti su jomis susijusius uždavinius naudojant tokią schemą:

kreivės lygtis suvedama į kanoninį pavidalą;

uždavinys išsprendžiamas kanoninėje koordinačių sistemoje;

reikalingi duomenys pervedami į pradinę koordinačių sistemą.

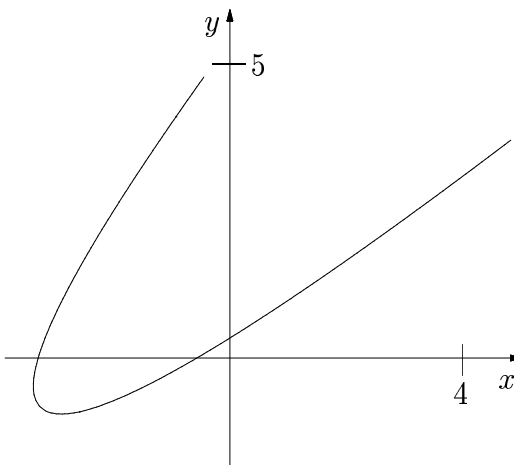
Tokia sprendimo metodika neretai veikia puikiai. Bet dažnai ji yra neefektyvi, nes susiduriama su rimtomis problemomis. Pažvelkime kiek atidžiau štai į tokį pavyzdį.

Kreivė apibrėžiama lygtimi $x^2 - 2.0000000002xy + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$. Skaičiuojant jos invariantus gaunama

$$I_1 = 2, \quad I_2 = -0.0000000002, \quad I_3 = -0.9999999992.$$

Kompiuteris, jei programos tikslumas skaičiuojant slankiu kableliu yra 10 skaičių už kablelio, sumišęs abejoja: kreivė centrinė ar ne? Mes, geometrijos teorijos asai, pašnibždėję jam, kad duotoji kreivė yra centrinė (akivaizdu, $I_2 \neq 0$), nedaug tepadėsime. Mat kompiuteriui, suvedant CENTRINĖS kreivės lygtį į kanoninį pavidalą, teks skaičiuoti $\frac{I_3}{I_2}$. Jei operuojant tokios eilės skaičiais ir neiššoks pranešimas apie dalybą iš nulio, gauto rezultato tikslumas bus visiškai nepatikimas.

Daugelį svarbių uždavinių (pavyzdžiui kreivės liestinių radimas) galima efektyviai spręsti pradinėje koordinačių sistemoje. Sekančiuose skyriuose tai panagrinėsime.



Pav. 2.5: "Beveik" hiperbolė, "beveik" parabolė.

2.10 Antros eilės kreivės ir tiesės sankirta

Tiesės lygtį užrašome parametriniame pavidale: jei žinomas tiesės taškas $A(x_0; y_0)$ ir jos krypties vektorius $L(l; m)$, tai bet kurio tiesės taško $M(x; y)$ koordinatės galime parašyti pavidale

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Įstatę šias išraiškas į bendrąją kreivės lygtį (2.6) ir sugrupavę gautojo reiškinių narius atžvilgiu t , gauname lygtį

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (2.25)$$

kur

$$P = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2, \quad Q = F_1(x_0, y_0)l + F_2(x_0, y_0)m, \quad R = F(x_0, y_0). \quad (2.26)$$

Įstatę lygties (2.25) šaknis t_1, t_2 į (2.24) gauname bendrųjų tiesės ir antros eilės kreivės taškų koordinatės.

Bendru atveju, jei $P \neq 0$, gauname, kad *kvadratinė* lygtis (2.25):

- turi dvi skirtingas šaknis – tiesė kerta kreivę dviejuose taškuose;
- turi vieną šaknį – tiesė kerta kreivę *kartotiniame* taške;

- neturi šaknų – tiesė kreivės nekerta.

Bet galimi ir kiti atvejai, kai lygtis (2.25) išsigimsta į tiesinę ar net nulinio laipsnio lygtį.

2.10.1 Asimptotinės kryptys

Apibrėžimas 12 Vektoriaus $L(l; m)$ kryptis vadinama asimptotine, jei

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0. \quad (2.27)$$

Asimptotinės krypties atveju lygtis (2.25):

- turi vieną šaknį – tiesė kerta kreivę *viename* taške;
- neturi šaknų – tiesė kreivės nekerta;
- turi be galo daug šaknų (virsta tapatybe $0 = 0$) – tiesė priklauso kreivei.

Nagrindėdami realių antros eilės kreivių kanonines lygtis nesunkiai atrenkame atvejus, kada kreivė turi asimptotines kryptis. Atsargiai, nepadarykite klaidos spęsdami uždavinius – žemiau išvardintose asimptotinės krypties sąlygose naudojama *kanoninė* koordinatų sistema, o ne pradinė.

- *hiperbolė* – dvi asimptotinės kryptys: $l^2/a^2 - m^2/b^2 = 0$; jos sutampa su hiperbolės asimptočių kryptimis;
- *parabolė* – viena asimptotinė kryptis: $m^2 = 0$; ji sutampa su parabolės simetrijos ašies kryptimi;
- *pora susikertančių tiesių* – dvi asimptotinės kryptys: $a^2l^2 - b^2m^2 = 0$; jos sutampa su susikertančių tiesių kryptimis;
- *pora lygiagrečių tiesių* – viena asimptotinė kryptis: $m^2 = 0$; ji sutampa su lygiagrečių tiesių kryptimi;
- *dviguba tiesė* – viena asimptotinė kryptis: $m^2 = 0$; ji sutampa su dvigubos tiesės kryptimi.

Naudojantis šiais kukliais pastebėjimais gauname gana efektyvius būdus: hiperbolės asimptotėms rasti; tiesėms, sudarančioms antros eilės kreivę, rasti.

Hiperbolės asimptočių radimas

1) Kadangi hiperbolės asimptotės eina per kreivės centrą, spęsdami sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0 \end{cases}$$

randame kreivės centrą $(x_0; y_0)$.

2) Kadangi hiperbolės asimptotės yra asimptotinės krypties, spęsdami lygtį

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

randame dvi asimptotines kryptis $(l_1; m_1)$ ir $(l_2; m_2)$.

3) Asimptočių lygtis parašome naudodami tiesės kanoninę lygtį:

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1}, \quad \frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2}.$$

Pavyzdys Rasti hiperbolės $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 34y + 2 = 0$ asimptotes.

Sprendimas 1) Spęsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ -3x - 7y + 17 = 0 \end{cases}$$

randame kreivės centrą $(1; 2)$.

2) Spęsdami lygtį

$$l^2 - 6lm - 7m^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 - 6\left(\frac{l}{m}\right) - 7 = 0$$

gauname $\left(\frac{l}{m}\right)_1 = 7$, $\left(\frac{l}{m}\right)_2 = -1$. Pasirenkame $l_1 = 7$, $m_1 = 1$, $l_2 = -1$, $m_2 = 1$.

3) Asimptočių lygtys yra

$$\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{1}, \quad \frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 2}{1}.$$

Susikertančių tiesių radimas

Sprendimo eiga identiška hiperbolės asimptotinių radimui, nes tiesės kertasi kreivės centre ir yra asimptotinių kryptų.

Pavyzdys Rasti kreivę $x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$ sudarančias tieses.

Sprendimas Kadangi $I_2 < 0$, $I_3 = 0$, kreivė sudaryta iš dviejų susikertančių tiesių.

1) Spęsdami lygčių sistemą

$$\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 2x + 3y - 6 = 0 \end{cases}$$

randame kreivės centrą $(3; 0)$.

2) Spęsdami lygtį

$$l^2 + 4lm + 3m^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{l}{m}\right) + 3 = 0$$

gauname $\left(\frac{l}{m}\right)_1 = -3$, $\left(\frac{l}{m}\right)_2 = -1$. Pasirenkame $l_1 = -3$, $m_1 = 1$, $l_2 = -1$, $m_2 = 1$.

3) Tiesių lygtys yra

$$\frac{x - 3}{-3} = \frac{y}{1}, \quad \frac{x - 3}{-1} = \frac{y}{1}.$$

Lygiagrečių tiesių radimas

1) Kadangi tiesės yra asimptotinės krypties, spęsdami lygtį

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0$$

randame asimptotinę kryptį $(l; m)$.

2) Pasirinkę neasimptotinės krypties tiesę, randame jos ir kreivės sankirtos taškus $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$. Kadangi kreivė sudaryta iš dviejų lygiagrečių tiesių, rastieji sankirtos taškai priklausau skirtingoms tiesėms.

3) Tiesių lygtis parašome naudodami tiesės kanoninę lygtį:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}, \quad \frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m}.$$

Pavyzdys Rasti kreivę $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 5 = 0$ sudarančias tieses.

Sprendimas Kadangi $I_2 = 0$, $I_3 = 0$, kreivė sudaryta iš dviejų lygiagrečių tiesių (galbūt menamų ar sutampančių).

1) Spręsdami lygtį

$$l^2 + 4lm + 4m^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 + 4\left(\frac{l}{m}\right) + 4 = 0$$

gauname $\frac{l}{m} = -2$. Pasirenkame $l = -2$, $m = 1$.

2) Randame kreivės ir tiesės $y = 0$ sankirtos taškus $(5; 0)$, $(1; 0)$.

3) Tiesių lygtys yra

$$\frac{x - 5}{-2} = \frac{y}{1}, \quad \frac{x - 1}{-2} = \frac{y}{1}.$$

Dvigubos tiesės radimas

Tai specialus kà tik išnagrinėtos lygiagrečių tiesių konfigūracijos atvejis. Ieškant neasimptotinės krypties tiesės ir kreivės sankirtos gauname tik vieną tašką. Kiti sprendimo momentai tokie patys.

Pavyzdys Rasti kreivę $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$ sudarančias tieses.

Sprendimas 1) Spręsdami lygtį

$$l^2 - 6lm + 9m^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{l}{m}\right)^2 - 6\left(\frac{l}{m}\right) + 9 = 0$$

gauname $\frac{l}{m} = 3$. Pasirenkame $l = 3$, $m = 1$.

2) Randame kreivės ir tiesės $y = 0$ sankirtos tašką $(-2; 0)$.

3) Tiesės lygtis yra

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y}{1}.$$

2.11 Antros eilės kreivių liestinės

Jei antros eilės kreivė nėra sudaryta iš tiesių – elipsė, hiperbolė, parabolė, liestinę jos taške A esame apibrėžę kaip kirstinių \overline{AM} , kai $M \rightarrow A$, ribinę padėtį. Šiuo atveju A yra *kartotinis* antros eilės kreivės ir liestinės sankirtos taškas. Jei antros eilės kreivė yra sudaryta iš tiesių, visiškai natūraliai šios tiesės traktuojamos kaip kreivės liestinės. Šie prisiminimai motyvuoja tokį apibrėžimą.

Apibrėžimas 13 Neasimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės kreivės liestine taške A , jei A yra kartotinis tiesės ir kreivės sankirtos taškas. Asimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės kreivės liestine, jei ji priklauso kreivei.

Teiginys 7 Antros eilės kreivės liestinės taške $A(x_0; y_0)$ lygtis yra

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_3(x_0, y_0) = 0. \quad (2.28)$$

Irodymas Tarkime liestinės krypties vektorius yra $(l; m)$. Lygtis (2.25) įgyja pavidalą

$$Pt^2 + 2Qt = 0,$$

nes A priklauso kreivei, t.y. $R = F(x_0, y_0) = 0$. Ši lygtis tikrai turi šaknį $t = 0$. Jei $(l; m)$ yra neasimptotinės krypties, tai ši šaknis yra kartotinė. Todėl $Q = 0$. Jei $(l; m)$ yra asimptotinės krypties, tai $P = 0$. Šiuo atveju tiesė priklauso kreivei jei $Q = 0$. Vadinasi, bet kuriuo atveju būtina ir pakankama lietimosi sąlyga yra

$$Q = F_1(x_0, y_0)l + F_2(x_0, y_0)m = 0.$$

Kadangi $(l; m)$ yra liestinės krypties vektorius, iš šios sąlygos seka, kad vektorius $(F_1(x_0, y_0); F_2(x_0, y_0))$ statmenas liestinei. Todėl jos lygtį galime parašyti pavidale

$$F_1(x_0, y_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Šią lygtį šiek tiek pertvarkome

$$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y - (F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0) = 0.$$

Kadangi $F(x_0, y_0) = 0$, pasinaudoję lygybe (2.8), įrodymą baigiame.

Po tokio šaunaus įrodymo visgi lieka vienas klausukas. Jei

$$F_1(x_0, y_0) = F_2(x_0, y_0) = 0,$$

tai lygtis (2.28) neapibrėžia tiesės. Vėl pasinaudoję lygybe (2.8) gauname, kad taip atsitinka, jei

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0) = 0 \\ F_2(x_0, y_0) = 0 \\ F_3(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Taškas $A(x_0; y_0)$, kurio koordinatės tenkina sąlygas (2.29), vadinamas *ypatinguoju* kreivės tašku. Parašę šias sąlygas kanoninėje koordinačių sistemoje gauname, kad reali antros eilės kreivė turi ypatingą tašką, jei ji yra:

- *pora susikertančių tiesių* – ypatingas taškas sutampa su kreivės centru;
- *dviguba tiesė* – visi kreivės taškai ypatingi (oi, oi).

2.11.1 Medžiaga pamąstymui

Atidesnis studentas gal jau pajuto, kad laiku "nusiplauname" nuo tolimesnio ypatingų taškų nagrinėjimo – kuo toliau į mišką, tuo daugiau medžių. Klausimas atkakliesiems – kas jūsų nuomone yra liestinės ypatingame taške (priklausomai nuo kreivės tipo) ir kaip jas rasti?

Ką tik pateikta medžiaga nėra sausas bendras požiūris į antros eilės kreivių geometrinės savybes. Ji iš tikro padeda glaustai suformuluoti, kas buvo nagrinėta atskirai elipsei, hiperbolei, parabolei. O tai įgalina efektyviau spręsti ne vieną uždavinį. Bet lazda turi du galus – apibendrinę kai kuriuos paprastus dalykus, turime būti matematiškai tikslūs iki galo. Nepamirškite šito algoritmiškai spęsdami įvairius uždavinius (rašydami programas) ir kitose srityse – tarp gyvų būtybių kompiuteris yra pats didžiausias formalistas.

2.11.2 Uždavinio sprendimo pavyzdys

Uždaviniai su antros eilės kreivės liestinėmis bendroje koordinatinių sistemoje sprendžiami faktiškai taip pat, kaip ir analogiški uždaviniai buvo sprendžiami kanoninėje kreivės koordinatinių sistemoje. Tik lygtis (2.28) sąsiuvinio lape užima kiek daugiau vietos lyginant su paprastomis liestinių lygtimis kanoninėje koordinatinių sistemoje.

Sąlyga Rasti kreivės $x^2 - xy - y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$ liestines, lygiagrečias tiesei $2x + 2y - 1 = 0$.

Sprendimas

(i) Pažymėkime lietimosi tašką $(x_0; y_0)$. Liestinės lygtis yra

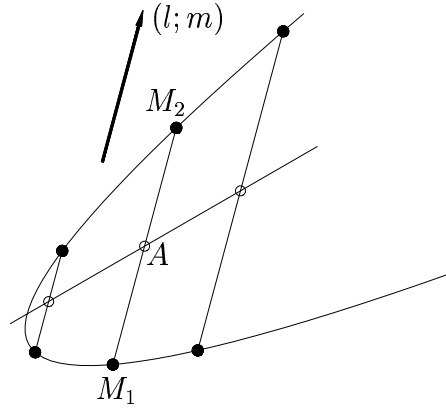
$$(x_0 - \frac{1}{2}y_0 - 1)x + (-\frac{1}{2}x_0 - y_0 + 1)y + (-x_0 + y_0 + 1) = 0.$$

(ii) Parašome lygiagretumo sąlygą

$$\frac{x_0 - \frac{1}{2}y_0 - 1}{2} = \frac{-\frac{1}{2}x_0 - y_0 + 1}{2}.$$

(iii) Sprendžiame sistemą, sudarytą iš lygiagretumo sąlygos bei sąlygos

$$x_0^2 - x_0y_0 - y_0^2 - 2x_0 + 2y_0 + 1 = 0,$$



Pav. 2.6: Kreivės skersmuo.

reiškiančios, kad lietimosi taškas priklauso kreivei. Gauname $\{x_0 = 1, y_0 = 1\}$ ir $\{x_0 = 7/5, y_0 = -1/5\}$.

(iv) Įstatę gautąsias x_0, y_0 reikšmes į liestinės lygtį, gauname dvi liestines:
 $x + y - 2 = 0, \quad 5x + 5y - 6 = 0.$

2.12 Antros eilės kreivės skersmenys

Fiksuojame neasimptotinės krypties vektorių $(l; m)$ ir sudarome šios krypties kreivės stygas.

Teiginys 8 *Antros eilės kreivės stygų, lygiagrečių vektoriui $(l; m)$, vidurio taškai priklauso tiesei*

$$(a_{11}l + a_{12}m)x + (a_{21}l + a_{22}m)y + a_{31}l + a_{32}m = 0. \quad (2.30)$$

Įrodymas Tegul $A(x_0; y_0)$ yra krypties $(l; m)$ stygos $\overline{M_1M_2}$ vidurio taškas (žr. Pav. 2.6). Jei t_1, t_2 yra lygties (2.25) šaknys, tai

$$M_1 = (lt_1 + x_0; mt_1 + y_0), \quad M_2 = (lt_2 + x_0; mt_2 + y_0).$$

Kadangi $A(x_0; y_0)$ stygos $\overline{M_1M_2}$ vidurio taškas, tai

$$x_0 = l \frac{t_1 + t_2}{2} + x_0, \quad y_0 = m \frac{t_1 + t_2}{2} + y_0.$$

Iš šių lygybių gauname, kad $t_1 + t_2 = 0$. Todėl pagal Vijeto teoremą $Q = 0$, t.y.

$$(a_{11}l + a_{12}m)x_0 + (a_{21}l + a_{22}m)y_0 + a_{31}l + a_{32}m = 0.$$

Ši lygybė galioja bet kurios stygos, turinčios kryptį $(l; m)$, vidurio taškui. Tuo įrodymą ir baigiame.

Tiesė, nusakoma lygtimi (2.30), vadinama *skersmeniu, jungtiniu* kryptčiais $(l; m)$. Kadangi lygtis (2.30) yra pergrupuota sąlyga

$$Q = F_1(x, y)l + F_2(x, y)m = 0 ,$$

kiekvienas skersmuo eina per kreivės centrą (jei jis egzistuoja).

2.13 Antros eilės kreivės simetrijos ašys

Simetrijos ašis dalija jai *statmenas* stygas pusiau, t.y. ji yra skersmuo, jungtinis sau statmenai kryptčiais.

Centrinių kreivių atveju šios kryptys yra

$$(\cos \alpha_i; \sin \alpha_i) , \tan \alpha_i = \frac{\lambda_i - a_{11}}{a_{12}} , i = 1, 2 ,$$

o λ_1, λ_2 – charakteringosios lygties šaknys.

Parabolės atveju (mums įdomiausiu) jos simetrijos ašis sutampa su kanoninės koordinatinių sistemos $O'x'y'$ x' -ašimi. Jau žinome, kad jos kryptis yra

$$(\cos \alpha; \sin \alpha) , \text{ kur } \tan \alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} .$$

Kadangi vektorius $(-\sin \alpha; \cos \alpha)$ yra statmenas x' -ašiai, gauname paprastą būdą parabolės simetrijos ašiai rasti.

Išvada 2 *Parabolės simetrijos ašis apibrėžiama lygtimi (2.30), kur*

$$l = -\sin \alpha , m = \cos \alpha , \tan \alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} .$$

Šios išvados visiškai pakanka efektyviam parabolės simetrijos ašiai radimui – pratybiniuose uždaviniuose tarpiniai nevisai žavingi skaičiai, susiję su sinuso ir kosinuso radimu, supaprastinami rašant galutinę simetrijos ašies lygtį. Naudodamiesi formulėmis (2.18) ir atlikdami šiuos supaprastinimus bendroje formoje, gauname, kad ieškodami parabolės simetrijos ašies pagal formulę (2.30) galime pasirinkti

$$l = a_{11} , m = a_{12} . \tag{2.31}$$

Sekančiame skyrelyje pamatysime, kodėl susirūpinome parabolės simetrijos ašimi – ją žinant galima gana efektyviai rasti parabolės kanoninę koordinačių sistemą. Bet prieš tai svarbus klausimas atidiems (priekabiems) studentams.

Šiokia tokia problemėlė Jei $a_{11} = a_{12} = 0$, praktiškai visi pateikti samprotavimai apie parabolės lygties prastinimą subyra į šipulius, nes $\tan \alpha = \frac{0}{0}$ (!!!) *Ką tai reiškia ir kaip lengvai sausiems išbristi iš šios balos?*

2.13.1 Parabolės kanoninės koordinačių sistemos radimas

Praktiškai ieškoti parabolės kanoninės koordinačių sistemą, remiantis išdėstyta teorine medžiaga, nėra efektyvu (todėl nuobodu). Dabar pateiksime gal ir ne patį tobuliausią, bet visgi gana efektyvų kanoninės koordinačių sistemos radimo būdą.

Algoritmas

- (1) Randame lygties invariantus.
- (2) Randame posūkio kampo sinusą ir kosinusą.
- (3) Randame parabolės simetrijos ašį.
- (4) Randame parabolės viršūnę $(x_0; y_0)$ – simetrijos ašies ir parabolės sankirtą.
- (5) Parašome *preliminarias* koordinačių sistemos transformacijos formules

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + x_0 \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + y_0. \end{cases} \quad (2.32)$$

- (6) Iš jau žinomos teorinės dalies gauname, kad naujoje koordinačių sistemoje parabolės lygtis įgyja pavidalą

$$I_1 y'^2 + 2a'_{13} x' = 0.$$

Koeficientą a'_{13} randame, įstatę išraiškas (2.32) į pradinę kreivės lygtį.

- (7) Jei I_1 ir a'_{13} priešingų ženklų, tai po kelių aritmetinių veiksmų gauname kanoninę lygtį $y'^2 = 2px'$, $p > 0$. Šiuo atveju preliminarios formulės (2.32) yra galutinės.
- (8) Jei I_1 ir a'_{13} vienodų ženklų, pasukus koordinačių sistemą 180° kampu koeficientas a'_{13} pakeičia ženklą, t.y. gauname prieš tai minėtą atvejį. Šioje situacijoje preliminarios formulės (2.32) keičiamos į

$$\begin{cases} x = -x' \cos \alpha + y' \sin \alpha + x_0 \\ y = -x' \sin \alpha - y' \cos \alpha + y_0. \end{cases}$$

(9) Pavargę ilsimės.

Pavyzdys Rasti parabolės $x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

Sprendimas

(1) Randame invariantus $I_1 = 2$, $I_2 = 0$, $I_3 = -16$. Pasinaudoję formule (2.23) gauname parabolės kanoninę lygtį $y'^2 = 2\sqrt{2}x'$.

(2) $\tan \alpha = 1$, todėl $\sin \alpha = \sqrt{2}/2$, $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$.

(3) Simetrijos ašis $x - y + 5 = 0$.

(4) Parabolės viršūnė $(-2; 3)$.

(5) Preliminarios koordinačių sistemos transformacijos formulės:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - 2 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' + 3. \end{cases}$$

(6) $a'_{13} = -2\sqrt{2}$.

(7)

(8)

(9) *Darbas žmogų puošia.* (Iš šūkių gegužės 1-osios šventei)

2.14 Pratimai bei uždaviniai

Skyrių baigiame charakteringų šios dalies uždavinių rinkiniu.

1. Rasti kreivės $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

2. Rasti kreivės $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

3. Rasti kreivės $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$ kanoninę lygtį ir kanoninę koordinačių sistemą.

4. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $x^2 + 4xy + 3y^2 - 6x - 12y + 9 = 0$ sudaryta iš tiesių ir rasti tų tiesių lygtis.

5. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$ sudaryta iš tiesių ir rasti tų tiesių lygtis.

6. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$ sudaryta iš tiesių ir rasti tų tiesių lygtis.

7. Invariantų pagalba parodyti, kad kreivė $x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x - 30y + 23 = 0$ yra hiperbolė ir rasti jos asimptočių lygtis.

8. Rasti kreivės $x^2 + xy - y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ liestines, statmenas tiesei $x - y + 3 = 0$.

9. Žinomos antros eilės kreivės simetrijos ašys $x - y + 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$ bei du jos taškai $(1; 1)$, $(0; 1)$. Rasti kreivės lygtį.

10. Žinoma parabolės simetrijos ašis $x - y + 1 = 0$ bei du jos taškai $(1; 1)$, $(0; 1)$. Rasti parabolės lygtį.

Dalis 3

Antros eilės paviršiai

3.1 Bendroji antros eilės paviršiaus lygtis

Tarkime yra fiksuota stačiakampė koordinatinių sistema $Oxyz$. Bendroji antros eilės paviršiaus lygtis $F(x, y, z) = 0$ šios sistemos atžvilgiu yra

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (3.1)$$

Remiantis bendrąja paviršiaus lygtimi sudaroma jos matrica A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

apibrėžiant $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$, $a_{41} = a_{14}$, $a_{42} = a_{24}$, $a_{43} = a_{34}$. Matrica A yra simetrinė, t.y. $A^T = A$. Pažymėję

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix},$$

gauname matricinę antros paviršiaus lygties formą

$$F(x, y, z) = X^T A X = 0.$$

Ši lygybė, kaip ir kreivių atveju, įrodoma elementariais skaičiavimais dauginant matrikas. Taip pat analogiškai įrodoma, kad

$$F(x, y, z) = xF_1(x, y, z) + yF_2(x, y, z) + zF_3(x, y, z) + F_4(x, y, z), \quad (3.2)$$

kur

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\ F_2(x, y, z) &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\ F_3(x, y, z) &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} \\ F_4(x, y, z) &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Išraiška $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ paprastai vadinama kvadratine paviršiaus lygties dalimi, $2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z$ – tiesine dalimi, o a_{44} – laisvuoju nariu.

3.2 Kanoninės antros eilės paviršių lygtys

Antros eilės paviršių lygčių prastinimas panašus į lygčių prastinimo procedūrą kreivių atveju – apibrėžiami invariantai, charakteringoji lygtis, paviršiaus centras ir t.t.. Džiugi žinia studentams – šitą dalį mes praleidžiame. Bet ši žinia gali transformuotis į nežinią – studentas taip nieko ir nesužinos apie paviršius. Neleisdami įvykti tokiai šiurpiai katastrofai, supažindinsime jus su kanoninėmis antros eilės paviršių lygtimis. Vėliau, naudodamiesi šiomis lygtimis, panagrinėsime paprasčiausias paviršių geometrines savybes. Tokiu būdu bent kiek susipažinsite su paviršių teorija. Dabar gal ir nepajusite, kad, lyginant su kreivėmis, paviršių matematinis nagrinėjimas yra žymiai sudėtingesnis. Bet nepamirškite – dauguma naudingų objektų (automobiliai, batai, ...) yra sudaryti iš įmantrių paviršių.

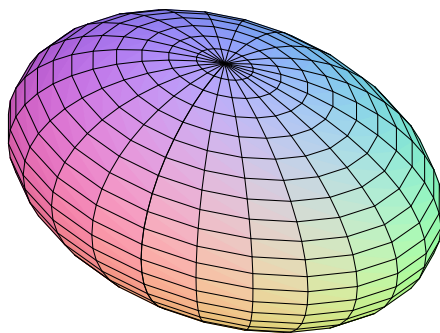
Dabar pateikiame pilną kanoninių lygčių sąrašą, įtraukdami į jį ir paviršius, sudarytus iš plokštumų, bei menamus paviršius. Bet piešiame ne visus paviršius – menamų nėra ką ir piešti, o paviršiai, sudaryti iš plokštumų, puikiai suvokiami ir be piešinio pagalbos.

1. Elipsoidas

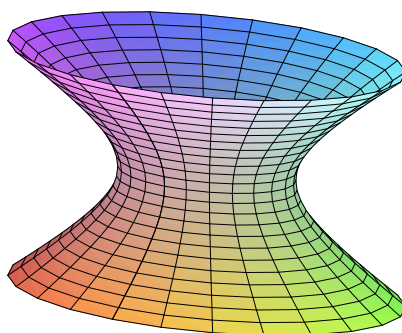
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3.4)$$

2. Menamas elipsoidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (3.5)$$



Pav. 3.1: Elipsoidas.



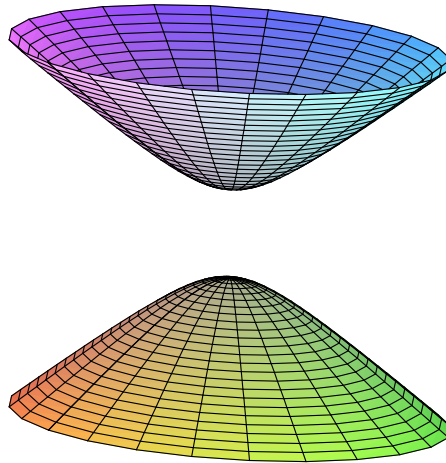
Pav. 3.2: Vienašakis hiperboloidas.

3. Vienašakis hiperboloidas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 . \quad (3.6)$$

4. Dvišakis hiperboloidas

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 . \quad (3.7)$$



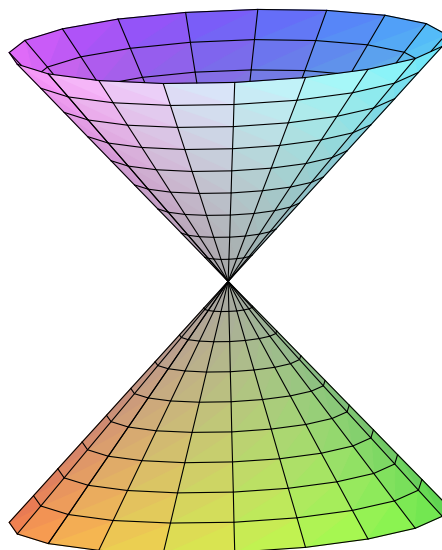
Pav. 3.3: Dvišakis hiperboloidas.

5. Kūgis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 . \quad (3.8)$$

6. Menamas kūgis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 . \quad (3.9)$$



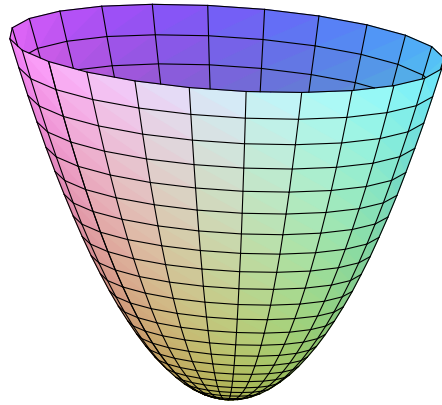
Pav. 3.4: Kūgis.

7. Elipsinis paraboloidas

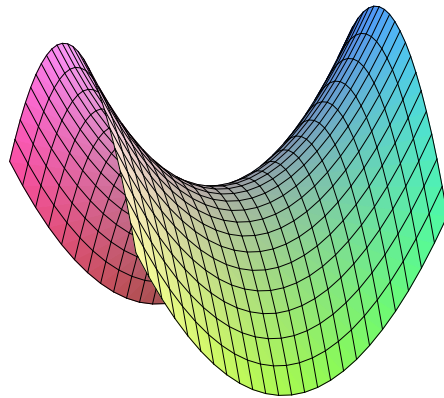
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z . \quad (3.10)$$

8. Hiperbolinis paraboloidas

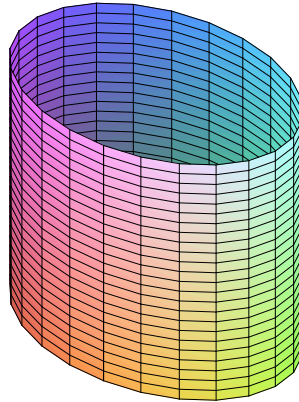
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z . \quad (3.11)$$



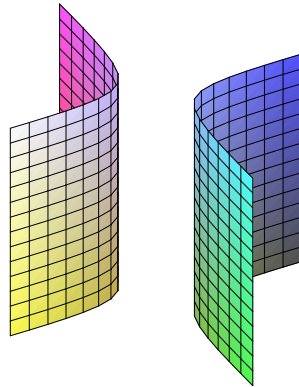
Pav. 3.5: Elipsinis paraboloidas.



Pav. 3.6: Hiperbolinis paraboloidas.



Pav. 3.7: Elipsinis cilindras.



Pav. 3.8: Hiperbolinis cilindras.

9. Elipsinis cilindras

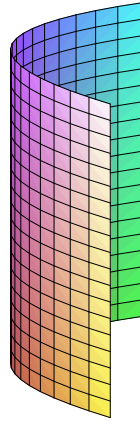
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (3.12)$$

10. Hiperbolinis cilindras

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (3.13)$$

11. Menamas elipsinis cilindras

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 . \quad (3.14)$$



Pav. 3.9: Parabolinis cilindras.

12. Parabolinis cilindras

$$y^2 = 2px . \quad (3.15)$$

13. Pora susikertančių plokštumų

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0 . \quad (3.16)$$

14. Pora menamų susikertančių plokštumų

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0 . \quad (3.17)$$

15. Pora lygiagrečių plokštumų

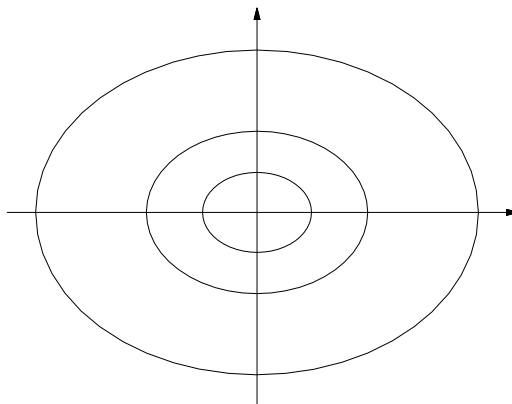
$$y^2 = a^2 . \quad (3.18)$$

16. Pora menamų lygiagrečių plokštumų

$$y^2 = -a^2 . \quad (3.19)$$

17. Dviguba plokštuma

$$y^2 = 0 . \quad (3.20)$$



Pav. 3.10: Panašios elipsės: $k = 1$ – išorinė elipsė; $k = 1/2$ – tarpinė elipsė; $k = 1/4$ – vidinė elipsė.

3.3 Antros eilės paviršių formos tyrimas

Ištirsime antros eilės paviršius, matematiškai pagrįsdami paveikslėliuose pavaizduotas formas. Šiam tikslui panaudosime seną (labai labai seną, iš tų neatmenamų laikų, kai žmonės dar nežinojo kas yra kompiuteris ir internetas) metodą: paviršius "pjaustomas" lygiagrečiomis plokštumomis; plokštumos ir paviršiaus sankirta yra kreivė; stebint kaip keičiasi sankirtos kreivė suvokiama (pajaučiama) ir paties paviršiaus forma. Pradžioje įrodysime keletą pagalbinių teiginių.

Teiginys 9 *Lygtis*

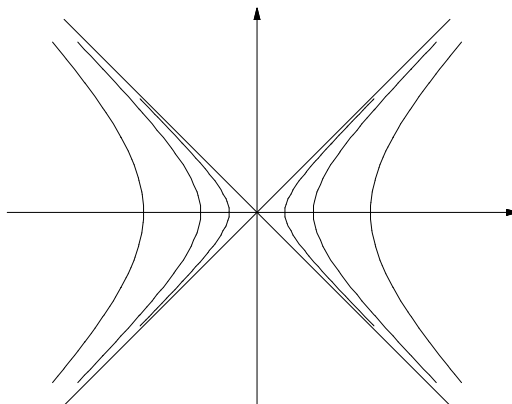
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, k > 0,$$

apibrėžia elipsę, kurios: centras yra $(0; 0)$; pusašės lygios ka ir kb ; viršūnės priklauso koordinatinėms ašims (Pav.3.10).

Įrodymas Lygtį dalijame iš k^2 ir gauname

$$\frac{x^2}{(ka)^2} + \frac{y^2}{(kb)^2} = 1.$$

Ši kreivės lygties forma ir užbaigia įrodymą (prisiminkime, ką turėjome žinoti apie elipsę).



Pav. 3.11: Panašios hiperbolės: $k = 1$ – išorinė hiperbolė; $k = 1/2$ – tarpinė hiperbolė; $k = 1/4$ – vidinė hiperbolė.

Teiginys 10 *Lygtis*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = k^2, k > 0,$$

apibrėžia hiperbolę, kurios: centras yra $(0; 0)$; realioji pusašė lygi ka ; asimptotės yra $y = \pm \frac{b}{a}x$; viršūnės priklauso x -ašiai (Pav.3.11).

Ką tik pateikto įrodymo dvynys Lygtį dalijame iš k^2 ir gauname

$$\frac{x^2}{(ka)^2} - \frac{y^2}{(kb)^2} = 1.$$

Teiginys 11 *Lygtis*

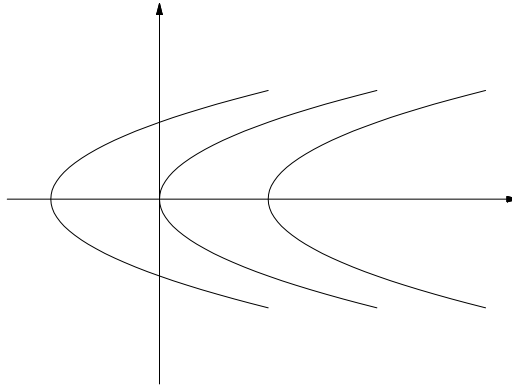
$$y^2 = 2px + a$$

apibrėžia parabolę, kuri gaunama iš parabolės $y^2 = 2px$ lygiagrečiai ją pastūmus vektorius $(-\frac{a}{2p}; 0)$ kryptimi ir dydžiu (Pav.3.12).

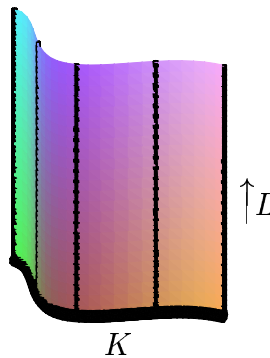
Įrodymas Lygtį parašome pavidale

$$y^2 = 2p(x + \frac{a}{2p}).$$

Šiais teiginiais naudosimės tirdami lygiagrečius paviršių piūvius. Papildoma svarbi informacija apie paviršiaus formą gaunama stebint, kokiomis kreivėmis juda charakteringi lygiagrečių piūvių taškai – kreivių viršūnės.



Pav. 3.12: Panašios parabolės: $a = 0$ – tarpinė parabolė; $a = 1$ – kairioji parabolė; $a = -1$ – dešinioji parabolė.



Pav. 3.13: Bendrasis cilindras.

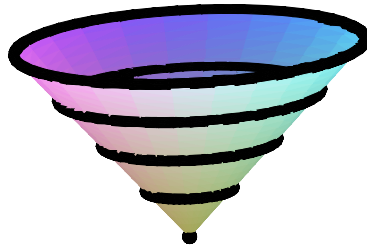
3.3.1 Cilindrai

Pradėkime nuo lengviausiai suvokiamų paviršių – cilindrų. Nors šis terminas žinomas iš mokyklos laikų, pasitikslinkime jį.

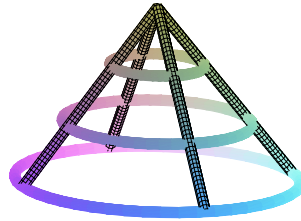
Apibrėžimas 14 *Bet kokiai kreivei K ir kryptiai $L = (l; m; n)$ cilindru vadiname paviršiu, kurį sudaro krypties L tiesės, kertančios kreivę K .*

Įsidėmėkite – kreivė K yra bet kokia (jokių specialių sąlygų, žr. Pav. 3.13).

Jei gerai žinomą vamzdį (K yra apskritimas, L – jo plokštumai statmena kryptis) prikimsite sprogmenų ir išdykaudami bumpatsite, vamzdžio aišku neliks, bet ką tik griežtai matem-



Pav. 3.14: Kūgio piūviai.



Pav. 3.15: Kūgio griaučiai.

atiškai apibrėžtu cilindru atsikratyti nepavyks. Veikiausiai teks sušluoti aibę dalelių, panašių į pavaizduotą Pav. 3.13.

Jei konkrečioje paviršiaus lygtyje $F(x, y, z) = 0$ nėra kintamojo z , tai tokia lygtis apibrėžia cilindą, sudarytą iš tiesių, lygiagrečių z -ašiai, ir kertančių xy -plokštumos kreivę, apibrėžtą lygtimi $F(x, y) = 0$. Ši kukli pastaba paaiškina elipsinio, hiperbolinio ir parabolinio cilindrų formą bei pavadinimą.

3.3.2 Kūgis

Kadangi kūgio lygtyje (3.8) kintamieji x, y, z yra tik kvadratais, x -, y - ir z -plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Todėl užtenka panagrinėti tik vieną iš simetrinių kūgio dalių, pavyzdžiui $z \geq 0$.

Plokštumos $z = z_0$ ir kūgio sankirta yra elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Naudodamiesi Teiginiu 9 gauname, kad kūgis sudarytas iš mažėjančių panašių elipsių (žr. Pav. 3.14). Plokštumoje $z = 0$ elipsė susitraukia į tašką. Šių elipsių viršūnės yra

plokštumose $x = 0$ ir $y = 0$, kurios su kūgiu kertasi tiesėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases}.$$

Plokštumomis $z = z_0$ iškertamų elipsių viršūnės šliaužia šiomis tiesėmis. Paėmę dalį (nei per tankiai, nei per retai) šių lygiagrečių elipsių ir tieses, kuriomis juda jų viršūnės, gauname ganėtinai charakteringą modelį – paviršiaus griaučius. Jie pakankamai gerai apibūdina patį paviršių, nors, kaip ir kur nors vidurnaktį beslampinėjantis skeletas, didelio žavesio nekelia.

Dar viena svarbi pastaba. Per tašką $A(x_0; y_0, z_0)$ ir kūgio viršūnę $(0; 0; 0)$ einančios tiesės bet kuris taškas turi pavidalą $(tx_0; ty_0, tz_0)$. Todėl, jei A priklauso kūgiui,

$$(tx_0)^2 + (ty_0)^2 + (tz_0)^2 = t^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = 0,$$

t.y. visa tiesė priklauso kūgiui. Vadinasi, kūgį galime sudaryti iš tiesių, išvesdami jas per kūgio viršūnę ir elipsės

$$\begin{cases} z = c \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

taškus.

3.3.3 Elipsoidas

Iš elipsoido lygties (3.4) gauname, kad jis yra "dėžutėje", apibrėžtoje nelygybėmis

$$|x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |z| \leq c.$$

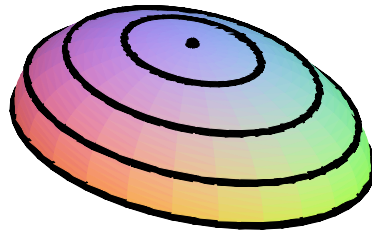
Analogiškai išnagrinėtam kūgio atvejui, x -, y - ir z -plokštumos yra elipsoido simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir elipsoido sankirta (žr. Pav. 3.16) yra elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur } k^2 = 1 - \frac{z_0^2}{c^2}.$$

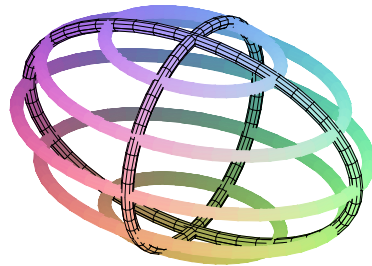
Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda elipsėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$

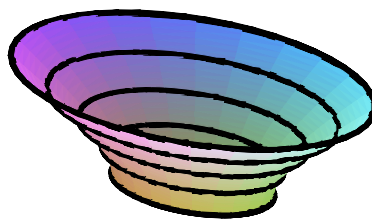
Kai $|z_0| = c$, elipsė susitraukia į tašką. Elipsoido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.17.



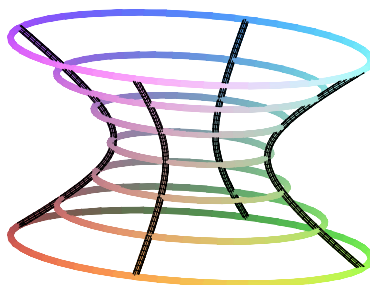
Pav. 3.16: Elipsoido piūviai.



Pav. 3.17: Elipsoido griaučiai.



Pav. 3.18: Vienašakio hiperboloido piūviai.



Pav. 3.19: Vienašakio hiperboloido griaučiai.

3.3.4 Vienašakis hiperboloidas

Iš vienašakio hiperboloido lygties (3.6) gauname, kad x -, y - ir z -plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir vienašakio hiperboloido sankirta (žr. Pav. 3.18) yra elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda hiperbolėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$

Mažiausią elipsę gauname, kai $z_0 = 0$. Ji vadinama vienašakio hiperboloido *žiotimis*. Vienašakio hiperboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.19.

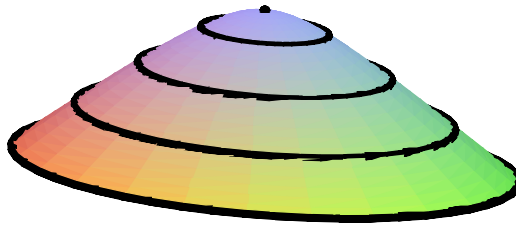
3.3.5 Dvišakis hiperboloidas

Iš dvišakio hiperboloido lygties (3.7) gauname, kad x -, y - ir z -plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir dvišakio hiperboloido sankirta (žr. Pav. 3.20) yra elipsė

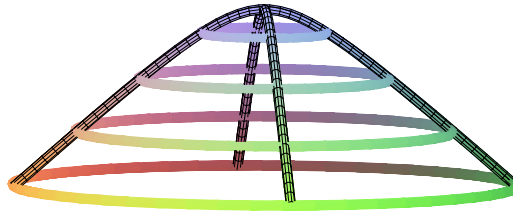
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur} \quad k^2 = \frac{z_0^2}{c^2} - 1.$$

Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda hiperbolėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ -\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}.$$



Pav. 3.20: Dvišakio hiperboloido piūviai.

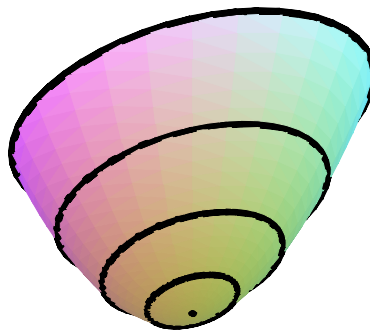


Pav. 3.21: Dvišakio hiperboloido griaučiai.

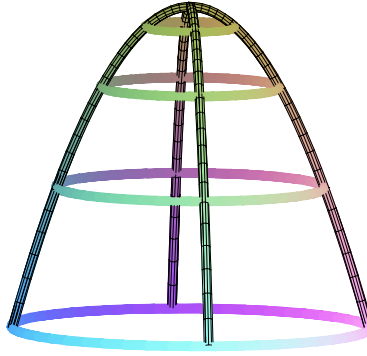
Kai $|z_0| = c$, elipsė susitraukia į tašką. Dvišakio hiperboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.21. (Pav. 3.20 ir Pav. 3.21 pavaizduota tik viena šio paviršiaus dalis.)

3.3.6 Elipsinis paraboloidas

Iš elipsinio paraboloido lygties (3.10) gauname, kad x - ir y -plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$, $z_0 \geq 0$, ir elipsinio paraboloido sankirta (žr. Pav. 3.22) yra



Pav. 3.22: Elipsinio paraboloido piūviai.



Pav. 3.23: Elipsinio paraboloido griaučiai.

elipsė

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2, \quad \text{kur } k^2 = 2z_0 .$$

Šių lygiagrečių elipsių viršūnės juda parabolėmis

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2b^2z \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2a^2z \end{cases} .$$

Kai $z_0 = 0$, elipsė susitraukia į tašką. Elipsinio paraboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.23.

3.3.7 Hiperbolinis paraboloidas

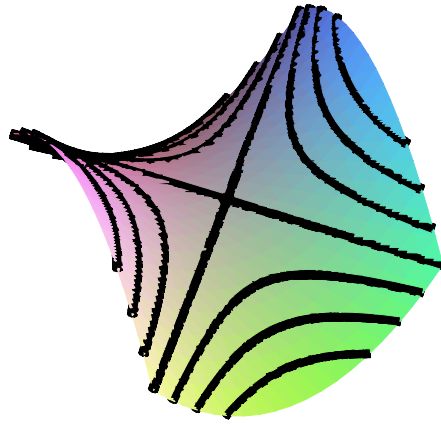
Iš hiperbolinio paraboloido lygties (3.11) gauname, kad x – ir y –plokštumos yra jo simetrijos plokštumos. Plokštumos $z = z_0$ ir hiperbolinio paraboloido sankirta (žr. Pav. 3.24) yra hiperbolė

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= k^2, & k^2 &= 2z_0, z_0 \geq 0; \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= k^2, & k^2 &= -2z_0, z_0 \leq 0. \end{aligned}$$

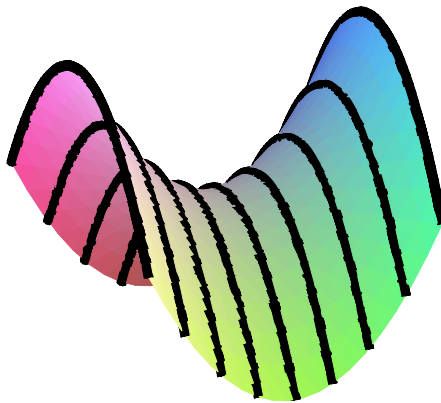
Pasitelkę Teiginį 10 galime nesunkiai priprasti prie tokio hiperbolinio paraboloido modelio. Visgi daugelis geriau suvokia šio paviršiaus formą, kai jis raikomas lygiagrečiomis plokštumomis $y = y_0$ (žr. Pav. 3.25). Šiuo atveju paviršiaus formos pojūtį skatina Teiginys 11.

Hiperbolinio paraboloido ir plokštumos $y = y_0$ sankirta yra parabolė

$$x^2 = 2a^2z + \frac{a^2}{b^2}y_0^2 .$$



Pav. 3.24: Hiperbolinio paraboloido "hiperboliniai" piūviai.



Pav. 3.25: Hiperbolinio paraboloido "paraboliniai" piūviai.



Pav. 3.26: Hiperbolinio paraboloido griaučiai.

Šių lygiagrečių parabolų viršūnės juda parabole

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -2b^2z \end{cases}$$

Hiperbolinio paraboloido griaučiai pavaizduoti Pav. 3.26.

3.4 Antros eilės paviršių tiesinės sudaromosios

Antros eilės paviršiaus *tiesine sudaromąja* vadiname jam priklausančią tiesę. Keletas žodžių apie terminą *sudaromąji*. Galima nurodyti ne vieną bendresnį, ne antros eilės paviršių, turintį jam priklausančias tieses, kurios nevinamos sudaromosiomis. Priežastis: tik tos kelios tiesės, jokios kitos, priklauso paviršiui; antros eilės paviršių atveju jam priklausančią tiesę galima tolygiai judinti taip, kad pajudintos tiesės liktų paviršiuje; pajudintosios tiesės *sudaro* (užpildo) visą paviršių.

Akivaizdu, kad visi cilindrai turi tiesines sudaromąsias. Skyrelio 3.3.2 pabaigoje parodėme, kad kūgis irgi turi tiesines sudaromąsias. Prieš pradėdami nagrinėti vienašakį hiperboloidą ir hiperbolinį paraboloidą įrodysime *neigiamo* pobūdžio teiginį.

Teiginys 12 *Elipsoidas, dvišakis hiperboloidas ir elipsinis paraboloidas neturi jiems priklausančių tiesių.*

Irodymas 1) Elipsoidas. Akivaizdu, nes tikrai nepavyks *begalinės* tiesės sukimšti į "dėžutę" $\{|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c\}$.

2) Dvišakis hiperboloidas. Tiesė, kuri nelygiagreti xy -plokštumai, negali priklausyti dvišakiui hiperboloidui: ji kirstų plokštumas $z = c$ ir $z = -c$, tarp kurių nėra paviršiaus taškų. Kaip jau žinome, plokštumos $z = z_0$ ir dvišakio hiperboloido sankirta yra elipsė. Tai nepalieka tiesei jokių galimybių priklausyti paviršiui.

3) Elipsinis paraboloidas. Samprotaujame panašiai kaip ir dvišakio hiperboloido atveju, nes elipsinis paraboloidas neturi taškų erdvės dalyje $z < 0$.

Vienašakis hiperboloidas

Vienašakio hiperboloido lygtį (3.6) parašome pavidale

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{b}\right) = \left(1 - \frac{y}{c}\right)\left(1 + \frac{y}{c}\right).$$

Iš šio vienašakio hiperboloido lygties pavidalo lengvai gauname, kad tiesės

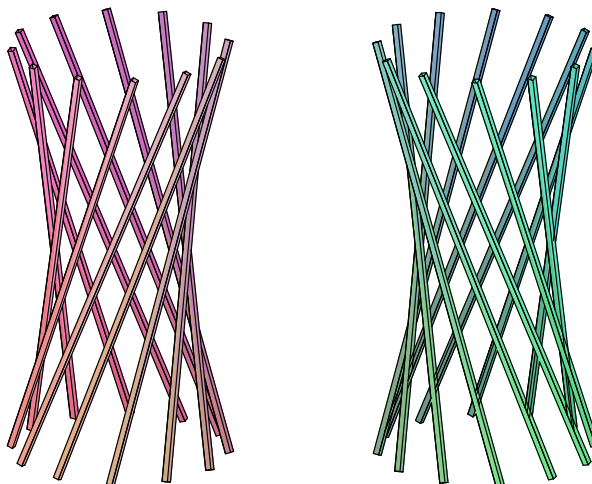
$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{b} = \mu_1 \left(1 - \frac{y}{c}\right) \\ \mu_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{b}\right) = 1 + \frac{y}{c} \end{cases}, \quad (3.21)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{b} = \mu_2 \left(1 + \frac{y}{c}\right) \\ \mu_2 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{b}\right) = 1 - \frac{y}{c} \end{cases} \quad (3.22)$$

priklauso paviršiui. Tolydžiai keisdami parametrus μ_1 ir μ_2 gauname dvi tiesinių sudaromųjų šeimas. Abiejų šeimų tiesės pavaizduotos Pav. 3.27. Bet, jei būsimė preciziškai tikslūs, šios tiesių šeimos neužpildo viso vienašakio hiperboloido – paviršiuje lieka mažytis plyšelį. Ši plyšelį=neužpildytą tiesę panaikiname apibrėždami kiekvienos šeimos ribines tieses

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{b} = \mu_1 \left(1 - \frac{y}{c}\right) \\ \mu_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{b}\right) = 1 + \frac{y}{c} \end{cases} = \lim_{\mu_1 \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{b}\right) = 1 - \frac{y}{c} \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = \frac{1}{\mu_1} \left(1 + \frac{y}{c}\right) \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{y}{c} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 0 \end{cases},$$

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{b} = \mu_2 \left(1 + \frac{y}{c}\right) \\ \mu_2 \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{b}\right) = 1 - \frac{y}{c} \end{cases} = \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{b}\right) = 1 + \frac{y}{c} \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = \frac{1}{\mu_2} \left(1 - \frac{y}{c}\right) \end{cases} = \begin{cases} 1 + \frac{y}{c} = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 0 \end{cases}.$$



Pav. 3.27: Vienašakio hiperboloido tiesinės sudaromosios.

Hiperbolinis paraboloidas

Hiperbolinio paraboloido lygtį (3.11) parašome pavidale

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z .$$

Iš šio hiperbolinio paraboloido lygties pavidalo lengvai gauname, kad tiesės

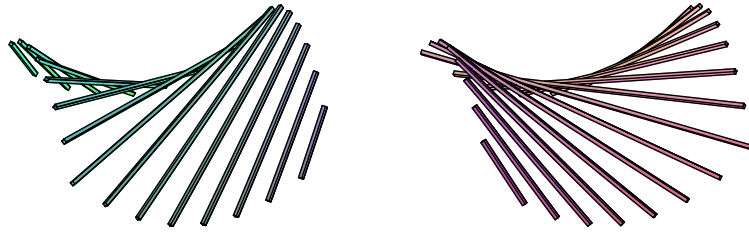
$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu_1 \\ \mu_1 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2z \end{cases} , \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu_2 \\ \mu_2 \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z \end{cases} \quad (3.24)$$

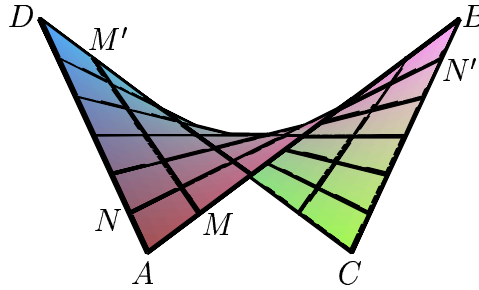
priklauso paviršiui. Tolydžiai keisdami parametrus μ_1 ir μ_2 gauname dvi tiesinių sudaromųjų šeimas. Abiejų šeimų tiesės pavaizduotos Pav. 3.28.

Pateikiame dar vieną hiperbolinio paraboloido modelį, kuris vartojamas geometriniam modeliavimui.

Tegul A, B, C, D yra erdvinio keturkampio viršūnės. Paimkime visas tieses $\overline{MM'}$, kur $M \in \overline{AB}$, $M' \in \overline{DC}$ ir taškai M, M' dalo atkarpas $\overline{AB}, \overline{DC}$ tuo pačiu santykiu. Tokių tiesių



Pav. 3.28: Hiperbolinio paraboloido tiesinės sudaromosios.



Pav. 3.29: Bitiesinis hiperbolinio paraboloido modelis.

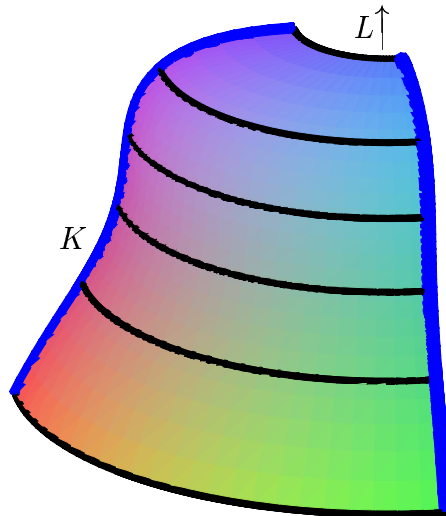
visuma sudaro hiperbolinį paraboloidą. Kitą tiesinių sudaromųjų šeimą gauname imdami tieses $\overline{NN'}$, kur taškai N, N' dalo atkarpas $\overline{AD}, \overline{BC}$ tuo pačiu santykiu. Šis *bitiesiniu* vadinamas hiperbolinio paraboloido modelis pavaizduotas Pav. 3.29.

3.5 Sukimosi paviršiai

Sukimosi paviršiai buvo atrasti labai seniai, kai iš primityvios beždžionės išsivystęs žmogus panoro turėti patogius indus valgiui ir troškulio malšinimui. Greitai puodžiaus (kaip šiom dienom informatiko) profesija pasidarė gana populiari, nes užtikrino pakankamai gerą pragyvenimo lygį. Pažvelkime į puodžiaus darbo procesą matematiko akimis – kadangi ruošiatės įgyti panašią garbingą profesiją, šio proceso supratimas turėtų padėti suvokti antros eilės paviršiaus formą.

Tegul kreivė K yra sukama apie kokią nors ašį L . Pradinės kreivės taškai sukdamiesi brėžia apskritimus, kurių visuma sudaro *sukimosi* paviršių. Dalis sukimosi paviršiaus pavaizduota Pav. 3.30.

Specialiai parinkus kai kurių antros eilės paviršių parametrus, jie tampa sukimosi pavirši-



Pav. 3.30: Sukimosi paviršius.

ais. Suprasti, kaip tai atsitinka, padės ši paprasta pastaba.

Teiginys 13 Tegul kreivė K

$$\begin{cases} y = 0 \\ dx^2 + g(z) = 0 \end{cases}$$

yra sukama apie z -ašį. Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$d(x^2 + y^2) + g(z) = 0.$$

Irodymas Tegul $M(x; 0; z)$ yra pradinės kreivės K taškas. Sukant kreivę K apie z -ašį, judančio taško M atstumas iki z -ašies bei jo z -koordinatė nesikeičia. Taško $M(x; y; z)$ atstumo iki z -ašies kvadratas yra $x^2 + y^2$. Todėl taškui M sukantis apie z -ašį pradinė sąlyga $y = 0$, $dx^2 + g(z) = 0$ pasikeičia į $d(x^2 + y^2) + g(z) = 0$.

3.5.1 Sukimosi elipsoidas

Kreivė K pasirenkame elipsę

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Remiantis Teiginiu 13 gauname, kad sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Taigi lygtis (3.4) apibrėžia sukimosi elipsoidą, jei $a = b$. Papildoma sąlyga $a = b = c$ reiškia, kad turime spindulio a sferą.

3.5.2 Vienašakis sukimosi hiperboloidas

Kreivė K pasirenkame hiperbolę

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Lygtis (3.6) apibrėžia vienašakį sukimosi hiperboloidą, jei $a = b$.

3.5.3 Dvišakis sukimosi hiperboloidas

Kreivė K pasirenkame hiperbolę

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$-\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$

Lygtis (3.7) apibrėžia dvišakį sukimosi hiperboloidą, jei $a = b$.

3.5.4 Elipsinis sukimosi paraboloidas

Kreivė K pasirenkame parabolę

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 2z \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 2z .$$

Lygtis (3.10) apibrėžia elipsinį sukimosi paraboloidą, jei $a = b$.

3.5.5 Elipsinis sukimosi cilindras

Kreivė K pasirenkame porą lygiagrečių tiesių

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} = 1 \end{cases}$$

Sukimosi paviršiaus lygtis yra

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} = 1 .$$

Lygtis (3.12) apibrėžia elipsinį sukimosi cilindrą, jei $a = b$.

3.6 Plokštumos ir antros eilės paviršiaus sankirta

Tirdami antros eilės paviršius kirtome juos *specialiai parinktomis* plokštumomis, gaudami antros eilės kreives. Kertant antros eilės paviršių *bet kokia* plokštuma taip pat gauname antros eilės kreives:

1) pasirenkame koordinačių sistemą $O'x'y'z'$ taip, kad kertamoji sutaptų su plokštuma $z' = 0$;

2) įstatę $z' = 0$ į paviršiaus lygtį $F'(x', y', z') = 0$ gauname antros eilės kreivės lygtį $F'(x', y', 0) = 0$ atžvilgiu koordinačių sistemos $O'x'y'$;

3) tiriamo gautąją antros eilės kreivės lygtį.

Ką tik aprašyta procedūra nesunkiai programuojama kompiuteriniam šio uždavinio sprendimui. Studentai jos nemėgsta, kai reikia skaičiuoti naudojantis tik rašikliu ir popieriaus

lapu – tenka parinkti koordinačių sistemą $O'x'y'$, o po to rasti kanoninę sankirtos lygtį. Tai nemažos apimties skaičiavimai, smarkiai erzinantys normalų studentą. Bet jei reikia rasti tik sankirtos kreivės tipą, skaičiavimai žymiai supaprastėja.

Pavyzdys

Sąlyga Rasti paviršiaus $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y + 4z + 2 = 0$ ir plokštumos $2x + y - z - 2 = 0$ sankirtos kreivės tipą.

Sprendimas Spreskime šį uždavinį taip, kaip, daug nesukdami galvos, sprendžia daugelis studentų. Ir tik pabaigoje panagrinėsime, kodėl jį išsprendėme teisingai.

Reikia rasti sankirtos kreivę? Jokių problemų, sprendžiame sistemą

$$\begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy - 2x - 2y + 4z + 2 = 0 \end{cases},$$

įstatydami išraišką $z = 2x + y - 2$ į antrąją lygtį. Taip gauname lygtį

$$9x^2 + 10xy + 4y^2 - 10x - 6y + 2 = 0 \quad (3.25)$$

Skaičiuojame šios lygties invariantus: $I_1 = 13$, $I_2 = 11$, $I_3 = -9$. Kadangi $I_2 > 0$, o I_1 ir I_3 priešingų ženklų, lygtis (3.25) apibrėžia elipsę. Rašydami

Atsakymas Sankirtos kreivė yra elipsė.

gaunate visus šiam uždaviniui skirtus balus. Atsargiai(!!!), tik neplepėkite, kad lygtis (3.25) yra *sankirtos kreivės* lygtis. Jums priklausantis balas tikrai bus sumažintas. Lygtis (3.25) yra sankirtos kreivės *projekcijos* į xy -plokštumą lygtis. Kadangi, projektuojant antros eilės kreivę į plokštumą, jos tipas nesikeičia, atsakymas *teisingas*.

Geras pratimas Kada sankirtos kreivė yra žemesnio (ne antrojo) laipsnio?

Dar geresnis pratimas Panagrinėkite, kokio tipo kreives gauname kirsdami plokštumą: elipsoidą; vienašakį hiperboloidą; dvišakį hiperboloidą; kūgį; elipsinį paraboloidą; hiperbolinį paraboloidą; elipsinį cilindą; hiperbolinį cilindą; parabolinį cilindą.

3.7 Antros eilės paviršiaus ir tiesės sankirta

Ši procedūra visiškai analogiška išnagrinėjai kreivių atveju.

Jei žinomas tiesės taškas $A(x_0; y_0; z_0)$ ir jos krypties vektorius $L(l; m; n)$, bet kurio tiesės taško $M(x; y; z)$ koordinatas parašome pavidale

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Įstatę šias išraiškas į bendrąją paviršiaus lygtį (3.1) ir sugrupavę gautojo reiškinio narius atžvilgiu t , gauname lygtį

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \quad (3.27)$$

kur

$$\begin{aligned} P &= a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn, \\ Q &= F_1(x_0, y_0, z_0)l + F_2(x_0, y_0, z_0)m + F_3(x_0, y_0, z_0)n, \\ R &= F(x_0, y_0, z_0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Įstatę lygties (3.27) šaknis t_1, t_2 į (3.26) gauname bendrųjų tiesės ir antros eilės paviršiaus taškų koordinatas.

Bendru atveju, jei $P \neq 0$, gauname, kad *kvadratinė* lygtis (3.27):

- turi dvi skirtingas šaknis – tiesė kerta paviršių dviejuose taškuose;
- turi vieną šaknį – tiesė kerta paviršių *kartotiniame* taške;
- neturi šaknų – tiesė paviršiaus nekerta.

Apibrėžimas 15 Vektoriaus $L(l; m; n)$ kryptis vadinama asimptotine, jei

$$a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{13}ln + 2a_{23}mn = 0. \quad (3.29)$$

Asimptotinės krypties atveju lygtis (3.27):

- turi vieną šaknį – tiesė kerta paviršių *viename* taške;
- neturi šaknų – tiesė paviršiaus nekerta;
- turi be galo daug šaknų (virsta tapatybe $0 = 0$) – tiesė priklauso paviršiui.

3.8 Antros eilės paviršiaus liečiamoji plokštuma

Ši dalis analogiška jau nagrinėtoms antros eilės kreivių liestinėms.

Apibrėžimas 16 Neasimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės paviršiaus liestine taške A , jei A yra kartotinis tiesės ir paviršiaus sankirtos taškas. Asimptotinės krypties tiesė vadinama antros eilės paviršiaus liestine, jei ji priklauso paviršiui.

Teiginys 14 Tiesės, liečiančios paviršių taške $A(x_0; y_0; z_0)$ sudaro plokštumą, kurios lygtis yra

$$F_1(x_0, y_0, z_0)x + F_2(x_0, y_0, z_0)y + F_3(x_0, y_0, z_0)z + F_4(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (3.30)$$

Irodymas Tarkime liestinės krypties vektorius yra $(l; m; n)$. Lygtis (3.27) įgyja pavidalą

$$Pt^2 + 2Qt = 0,$$

nes A priklauso paviršiui, t.y. $R = F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ši lygtis tikrai turi šaknį $t = 0$. Jei $(l; m; n)$ yra neasimptotinės krypties, tai ši šaknis yra kartotinė. Todėl $Q = 0$. Jei $(l; m; n)$ yra asimptotinės krypties, tai $P = 0$. Šiuo atveju tiesė priklauso paviršiui, jei $Q = 0$. Vadinasi, bet kuriuo atveju būtina ir pakankama lietimosi sąlyga yra

$$Q = F_1(x_0, y_0, z_0)l + F_2(x_0, y_0, z_0)m + F_3(x_0, y_0, z_0)n = 0.$$

Kadangi $(l; m; n)$ yra liestinės krypties vektorius, iš šios sąlygos gauname, kad vektorius $(F_1(x_0, y_0, z_0); F_2(x_0, y_0, z_0); F_3(x_0, y_0, z_0))$ statmenas liestinei. Tai reiškia, kad liestinės sudaro plokštumą, kurios lygtis yra

$$F_1(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_3(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Šią lygtį šiek tiek pertvarkome

$$\begin{aligned} & F_1(x_0, y_0, z_0)x + F_2(x_0, y_0, z_0)y + F_3(x_0, y_0, z_0)z \\ & - (F_1(x_0, y_0, z_0)x_0 + F_2(x_0, y_0, z_0)y_0 + F_3(x_0, y_0, z_0)z_0) = 0. \end{aligned}$$

Kadangi $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, pasinaudoję lygybe (3.2), įrodymą baigiame.

3.9 Paviršiaus ir liečiamosios plokštumos sankirta

Jau žinome, kad antros eilės paviršiaus ir plokštumos sankirta yra antros eilės kreivė. Jei plokštuma yra liečiama, sankirtos kreivės tipas yra ne bet koks. Nagrinėjame tik tuos antros eilės paviršius, kurie nėra sudaryti iš plokštumų.

Teiginys 15 *Antros eilės paviršiaus ir liečiamosios plokštumos sankirta gali būti:*

- 1) *vienas taškas (išsigimusi elipsė);*
- 2) *pora susikertančių tiesių;*
- 3) *dviguba tiesė.*

Irodymas Koordinačių sistemą parenkame taip, kad lietimosi taškas sutaptų su koordinačių sistemos pradžia, o liečiamosios plokštumos lygtis būtų $z = 0$. Iš (3.30) gauname, kad $a_{14} = 0$, $a_{24} = 0$, $a_{44} = 0$. Todėl sankirtos kreivės lygtis yra

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0 .$$

Iš jau nagrinėtos kreivių teorijos seka, kad tegalimas tik kuris nors iš suminėtu atvejų.

Pirmuoju atveju lietimosi taškas vadinamas *elipsiniu*, antruoju – *hiperboliniu*, trečiuoju – *paraboliniu*.

3.10 Charakteringų uždavinių sprendimas

Pateikta paviršių teorija tur būt sužavėjo ne vieną studentą. Bet visgi jo požiūriu šioje teorijoje yra rimtas trūkumas – be uždavinio apie sankirtos kreivės tipo radimą, neaišku ką reikės spręsti per egzaminą. Užpildome šią spragą kelių charakteringų uždavinių sąlygomis bei jų sprendimu.

3.11 Cilindro lygties radimas

Sąlyga Rasti lygtį cilindro, kurio tiesinės sudaromosios lygiagrečios vektoriui $L(1; 3; 1)$ ir kerta kreivę K

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases}$$

Sprendimas Tegul taškas $M(x; y; z)$ priklauso cilindriui. Bet kuris tiesinės sudaromosios, einančios per M , taškas turi pavidalą $N(x+t; y+3t; z+t)$. Kadangi sudaromoji kerta kreivę K , egzistuoja tokia t reikšmė, kad taško N koordinatės tenkina kreivės lygtis, t.y.

$$\begin{cases} 2(x+t) + y + 3t + z + t = 0 \\ (x+t)^2 + (y+3t)^2 + 2(z+t)^2 = 1 \end{cases}$$

Iš pirmosios sąlygos seka, kad $t = -(2x + y + z)/6$. Įstatę šią išraišką į antrąją sąlygą ir atlikę aritmetinius veiksmus gauname

$$(4x - y - z)^2 + (-2x + 5y - z)^2 + 2(-2x - y + 5z)^2 = 36.$$

Dar šiek tiek kantrybės ir parašome atsakymą – cilindro lygtį:

$$7x^2 + 7y^2 + 13z^2 - 5xy - 11xz - 7yz - 9 = 0.$$

3.11.1 Kūgio lygties radimas

Sąlyga Rasti lygtį kūgio, kurio tiesinės sudaromosios kerta kreivę K

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 1 \end{cases},$$

o $A(1, 1, 2)$ yra kūgio viršūnė.

Sprendimas Tegul taškas $M(x; y; z)$ priklauso cilindriui. Tiesinės sudaromosios, einančios per M , krypties vektorius yra $\overline{AM} = (x-1; y-1; z-2)$. Todėl bet kuris šios sudaromosios taškas turi pavidalą $N(1 + (x-1)t; 1 + (y-1)t; 2 + (z-2)t)$. Kadangi sudaromoji kerta kreivę K , egzistuoja tokia t reikšmė, kad taško N koordinatės tenkina kreivės lygtis, t.y.

$$\begin{cases} 2(1 + (x-1)t) + 1 + (y-1)t + 2 + (z-2)t = 0 \\ (1 + (x-1)t)^2 + (1 + (y-1)t)^2 + 2(2 + (z-2)t)^2 = 1 \end{cases}$$

Iš pirmosios sąlygos seka, kad $t = -\frac{5}{2x+y+z-5}$. Dar kiek panašiai pasikuitę, kaip ir su cilindro lygtimi, gauname atsakymą:

$$41x^2 + 24y^2 + 10z^2 + 6xy - 54xz + 32yz + 20x + 10y + 10z - 25 = 0.$$

3.11.2 Tiesinių sudaromųjų radimas

Sąlyga Rasti hiperbolinio paraboloido $4x^2 - 9y^2 = 2z$ tiesines sudaromasias, einančias per paviršiaus tašką $A(1; 2; -16)$.

Pirmas sprendimo būdas Remdamiesi formule 3.23 vieną iš sudaromųjų ieškome pavidale

$$\begin{cases} 2x - 3y = \mu_1 \\ \mu_1(2x + 3y) = 2z \end{cases}.$$

Kadangi sudaromoji eina per tašką A , įstatę taško A koordinates į pirmąją lygtį gauname $\mu_1 = -4$. Su antrąja lygtimi galime negaišti, nes tikrai gausime tokią pat μ_1 reikšmę. Taigi, viena iš sudaromųjų yra

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 4x + 6y = -z \end{cases}.$$

Remdamiesi formule 3.24 randame antrą sudaromąją:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 8x + 12y = z \end{cases}.$$

Antras sprendimo būdas Ieškome tiesinės sudaromosios krypties vektorius $(l; m; n)$ naudodamiesi formulėmis (3.27) ir (3.28): $R = 0$, nes A priklauso paviršiui; $P = 4l^2 - 9m^2$; $Q = 4l - 18m - n$. Tiesė priklauso paviršiui, jei $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$. Spęsdami sistemą

$$\begin{cases} 4l^2 - 9m^2 = 0 \\ 4l - 18m - n = 0 \end{cases}$$

gauname $(l = \frac{3}{2}m, n = -12m)$ ir $(l = -\frac{3}{2}m, n = -24m)$. Fiksavę $m = 2$ turime du sudaromųjų krypties vektorius $(3; 2; -24)$ ir $(-3; 2; -48)$. Todėl ieškomų tiesinių sudaromųjų kanoninės lygtys yra

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+16}{-24}, \quad \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+16}{-48}.$$

Antrasis sprendimo būdas yra universalesnis. Naudodamiesi juo išspręskite dar vieną uždavinį.

Sąlyga Rasti paviršiaus $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 5xy + xz + yz - 6x + y + z - 3 = 0$ tiesines sudaromasias, einančias per jo tašką $A(1; -2; 3)$.

3.12 Pratimai bei uždaviniai

Standartinė temos nagrinėjimo pabaiga – užduotys savarankiškam darbui.

1. Rasti paviršiaus $3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 360 = 0$ ir plokštumos $x - y + z - 1 = 0$ sankirtos kreivės tipą.

2. Rasti paviršiaus $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$ ir plokštumos $2x - y + z = 0$ sankirtos kreivės tipą.

3. Rasti paviršiaus $x^2 - 3y^2 + z^2 - 6xy + 2yz - 3y + z - 1 = 0$ ir plokštumos $2x - 3y - z + 2 = 0$ sankirtos kreivės tipą.

4. Rasti lygtį cilindro, kurio tiesinės sudaromosios statmenos plokštumai $2x - 4z + 3 = 0$ ir kerta kreivę K

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - x = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

5. Rasti lygtį cilindro, kurio tiesinės sudaromosios lygiagrečios x -ašiai ir kerta kreivę K

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

6. Rasti lygtį kūgio, kurio tiesinės sudaromosios kerta kreivę K

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases},$$

o $A(1, -1, 1)$ yra kūgio viršūnė.

7. Rasti paviršiaus

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

ir tiesės

$$\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 2}{-3} = \frac{z + 2}{-2}$$

sankirtos taškus ir plokštumas, liečiančias paviršių tuose taškuose.

8. Rasti paviršiaus $25x^2 + 16y^2 - 9z^2 = 25$ liečiamąsias plokštumas, išvestas per tiesę

$$\frac{x}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}.$$

9. Rasti paviršiaus $x^2 + 9y^2 - 4z^2 = 4$ tiesines sudaromasias, einančias per jo tašką $(2; 2; 3)$.

10. Rasti paviršiaus $x^2 + y^2 + 2z^2 - xy - 6xz - 3yz - 2x + 6y - 7z - 1 = 0$ tiesines sudaromasias, einančias per jo tašką $(3; -2; 0)$.

Dalis 4

Bézier kreivės

4.1 Afininė taškų kombinacija

4.1.1 Pamokantis pavyzdys

Tarkime turime du taškus M_1 ir M_2 .

- (1) Fiksuojame koordinačių sistemą Oxy ir suskaičiuojame taškų koordinates

$$M_1 = (x_1; y_1), \quad M_2 = (x_2; y_2);$$

- (2) taškų koordinates (padauginame iš 1 ir) sudedame

$$1M_1 + 1M_2 = (1x_1 + 1x_2; 1y_1 + 1y_2) = (x_3; y_3);$$

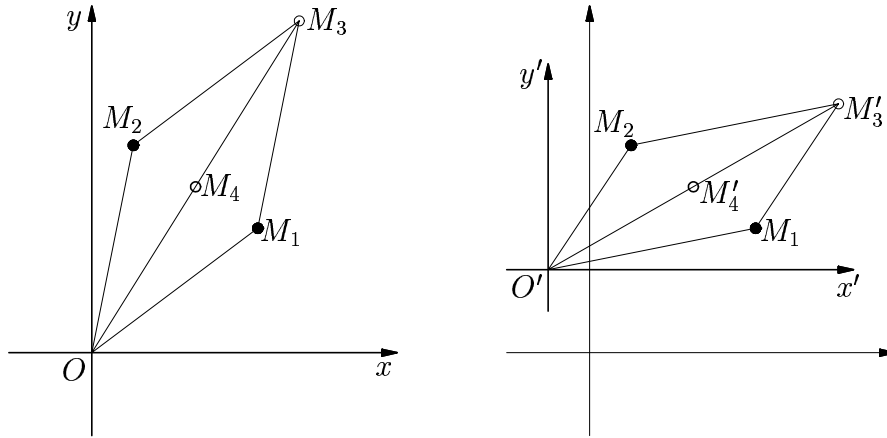
pažymime $M_3 = (x_3; y_3)$;

- (3) taškų koordinates padauginame iš $\frac{1}{2}$ ir sudedame

$$\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2 = \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2; \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2\right) = (x_4; y_4);$$

pažymime $M_4 = (x_4; y_4)$;

Atlikdami tuos pačius veiksmus atžvilgiu kitos koordinačių sistemos $O'x'y'$ gauname taškus M'_3 ir M'_4 . Nesunku pastebėti, kad $M_4 = M'_4$, bet taškai M_3 ir M'_3 skiriasi (žr. Pav. 4.1). Peršasi išvada, kad reiškiny $\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2$ turi geometrinę prasmę (atkarpos M_1M_2 vidurio



Pav. 4.1: $1M_1 + 1M_2$ ir $\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2$.

taškas), o reiškinys $1M_1 + 1M_2$ neturi, nes gaunamas rezultatas priklauso nuo koordinacių sistemos parinkimo. Paviršutiniška bloguolio $1M_1 + 1M_2$ ir geruolio $\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2$ apžiūra atskleidžia esminį jų skirtumą: pirmuoju atveju $1 + 1 \neq 1$; antruoju atveju $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

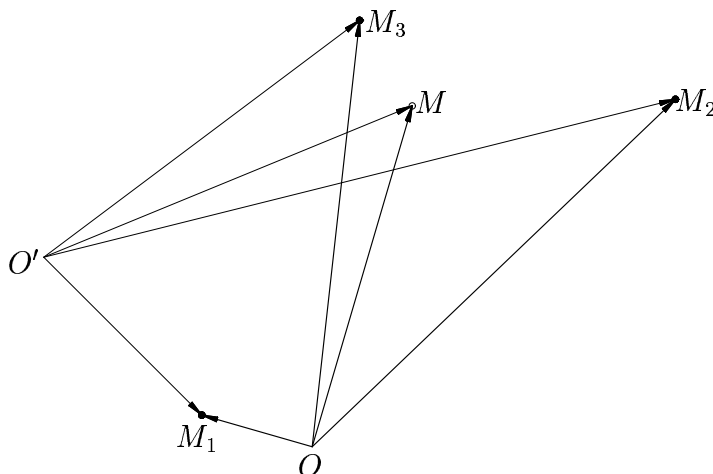
4.1.2 Afininė taškų kombinacija nepriklauso nuo koordinacių sistemos parinkimo

Dabar matematiškai pagrisime tai, ką neseniai pastebėjome atskirame pavyzdyje:

Afininė taškų kombinacija Tegul $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$. Išraiška $m_1M_1 + m_2M_2 + \dots + m_nM_n$ turi geometrinę prasmę, t.y. atlikus nurodytus aritmetinius veiksmus su kiekviena taškų koordinate, gaunamas rezultatas nepriklauso nuo koordinacių sistemos. Šis taškas vadinamas *afinine* taškų M_1, M_2, \dots, M_n kombinacija.

Prisiminkime tai, ko tikriausiai ir nebuvo užmiršę - su *vektoriais* analogiškus veiksmus atliekame be apribojimų, t.y. nereikalaujame $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$. Kiek įsigilinę į (gal kiek primirštą) taško koordinacių apibrėžimą, matome, kad tereikia įrodyti tokį teiginį.

Teiginys 16 Tegul $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$, O ir O' – bet kokie du taškai. Vektoriaus $m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OM_n}$ atidėto nuo taško O , galas sutampa su vektoriaus $m_1\overrightarrow{O'M_1} + m_2\overrightarrow{O'M_2} + \dots + m_n\overrightarrow{O'M_n}$, atidėto nuo taško O' , galu.



Pav. 4.2: $n = 3$: afininė taškų kombinacija.

Irodymas Teiginys iliustruojamas Pav. 4.2 kai $n = 3$, $M = m_1M_1 + m_2M_2 + m_3M_3$. Turime įrodyti, kad

$$m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OM_n} = \overrightarrow{OO'} + m_1\overrightarrow{O'M_1} + m_2\overrightarrow{O'M_2} + \dots + m_n\overrightarrow{O'M_n}.$$

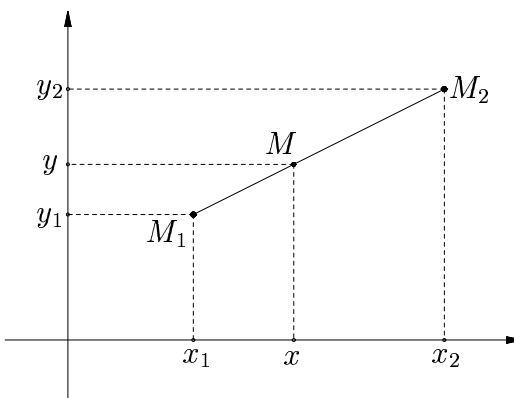
Bet kokiam taškui A teisinga $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'A}$, todėl

$$\begin{aligned} m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n\overrightarrow{OM_n} &= \\ m_1(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_1}) + m_2(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_2}) + \dots + m_n(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M_n}) &= \\ (m_1 + m_2 + \dots + m_n)\overrightarrow{OO'} + m_1\overrightarrow{O'M_1} + m_2\overrightarrow{O'M_2} + \dots + m_n\overrightarrow{O'M_n} &= \\ \overrightarrow{OO'} + m_1\overrightarrow{O'M_1} + m_2\overrightarrow{O'M_2} + \dots + m_n\overrightarrow{O'M_n}. \end{aligned}$$

4.1.3 Atkarpos dalijimas duotu santykiu

Jokių abejonų, kiekvienam aišku, kas turima omenyje sakant, kad atkarpa dalijama duotu santykiu. Visgi patikslinkime tai, įtraukdami į šią savoką ir atvejį, kai duotas santykis yra neigiamas.

Apibrėžimas 17 Tegul taškas M priklauso tiesei $\overline{M_1M_2}$. Orientuotu atkarpa M_1M ir MM_2 santykiu vadiname:



Pav. 4.3: Atkarpos dalijimas.

- (1) jų ilgių santykį $|M_1M| : |MM_2|$, jei vektoriai $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{MM_2}$ yra vienos krypties;
 (2) jų ilgių santykį su ženklu minus, t.y. $-|M_1M| : |MM_2|$, jei vektoriai $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{MM_2}$ yra priešingų kryptių.

Orentuotą atkarpų $\overline{M_1M}$ ir $\overline{MM_2}$ santykį žymime $M_1M : MM_2$.

Iš šio apibrėžimo seka, kad santykis $M_1M : MM_2$ yra teigiamas, jei taškas M yra tarp taškų M_1 , M_2 , ir neigiamas priešingu atveju.

Teiginys 17 Taškas $M = (1 - t)M_1 + tM_2$ dalija atkarpą $\overline{M_1M_2}$ santykiu $t : (1 - t)$, t.y. $M_1M : MM_2 = t : (1 - t)$.

Irodymas Pažymėkime taškų M_1 , M_2 , M koordinates atitinkamai $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x; y)$ (žr. Pav. 4.3). Akivaizdu, kad $M_1M : MM_2 = x - x_1 : x_2 - x$. Iš $x = (1 - t)x_1 + tx_2$, $y = (1 - t)y_1 + ty_2$ lengvai gauname $M_1M : MM_2 = t : (1 - t)$, nes $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$, $x_2 - x = (1 - t)(x_2 - x_1)$.

Šie mūsų kuklūs samprotavimai subyra į šipulius, jei atkarpa $\overline{M_1M_2}$ lygiagreti y -ašiai. Nieko baisaus, samprotaujame analogiškai, sutelkę dėmesį antrai koordinatei. Ir akivaizdu, kaip parašyti įrodymą tuo atveju, kai taškai priklauso erdvei.

4.1.4 Materialių taškų masių centras

Afininė taškų kombinacija neretai interpretuojama kaip materialių taškų masių centras. Tai praverčia fizikiniuose uždaviniuose. Be to fizinė reiškinių interpretacija padeda geriau suvokti jo esmę ir matematinio mastymo apgadintiems žmonėms.

Taškas M su jam priskirta mase m vadinamas *materialiu* tašku ir žymimas mM . Materialių taškų masių centras pasižymi savybėmis:

Dvieju materialių taškų masių centras Tai gerai žinoma sveto taisyklė: materialių taškų m_1M_1 ir m_2M_2 masių centras M yra atkarpoje $\overline{M_1M_2}$ ir $m_1|M_1M| = m_2|M_2M|$.

Materialių taškų grupavimo principas Materialių taškų masių centras nesikeičia, jei bet kurią jų dalį pakeičiame tos dalies masių centru, kurio masė yra prilyginama tos dalies taškų masių sumai.

Remiantis šiomis masių centro savybėmis (matematikai-ortodoksai sakytų aksiomomis) nesunkiai įrodomas toks teiginys.

Teiginys 18 *Materialių taškų $m_1M_1, m_2M_2, \dots, m_nM_n$ masių centras yra lygus afininei kombinacijai*

$$\frac{m_1}{\sum_{i=1}^n m_i} M_1 + \frac{m_2}{\sum_{i=1}^n m_i} M_2 + \dots + \frac{m_n}{\sum_{i=1}^n m_i} M_n .$$

Keletas pavyzdžių (pabandykite įrodyti).

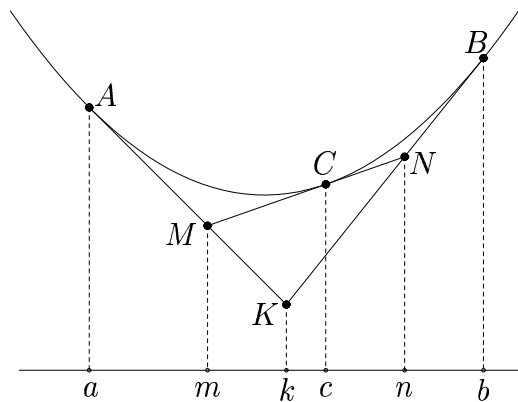
- Materialių taškų $1M_1, 1M_2, 1M_3$ masių centras yra $\triangle M_1M_2M_3$ pusiauakraštinių sankirtos taškas.
- Materialių taškų $|M_2M_3|M_1, |M_1M_3|M_2, |M_1M_2|M_3$ masių centras yra $\triangle M_1M_2M_3$ pusiauakampinių sankirtos taškas.

4.2 Dar viena parabolės liestinių savybė

Teiginys 19 *Tegul A, B ir C yra parabolės taškai, K – parabolės liestinių taškuose A ir B sankirta, o M ir N – parabolės liestinės taške C sankirta su atitinkamai tiese \overline{AK} ir \overline{BK} . Tada*

$$AM : MK = KN : NB = MC : CN .$$

Įrodymas Ši parabolės liestinių savybė pavaizduota Pav. 4.4. Kad jums, žiūrint į brėžinį, nereikėtų mankštinti kaklo, teiginį įrodome parabolėi $x^2 = 2py$. Taško pirmąją koordinatę žymime atitinkama mažąja raide.



Pav. 4.4: Parabolės liestinių savybė.

Pradžioje rasime bet kokių dviejų parabolės liestinių jos taškuose

$$\left(x_0; \frac{x_0^2}{2p}\right), \quad \left(x_1; \frac{x_1^2}{2p}\right)$$

sankirtą. Sprendami sistema

$$\begin{cases} xx_0 = p\left(y + \frac{x_0^2}{2p}\right) \\ xx_1 = p\left(y + \frac{x_1^2}{2p}\right) \end{cases}$$

gauname $x = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$ (y mūsų nedomina). Vadinasi

$$k = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a+c}{2}, \quad n = \frac{b+c}{2}.$$

Naudodamiesi šiomis formulėmis patikriname, kad

$$(m-a) : (k-m) = (n-k) : (b-n) = (c-m) : (n-c).$$

4.3 Parabolės lanko Bėzier pavidalas

Remdamiesi Teiginiu 19 pažymėkime $AM : MK = KN : NB = MC : CN = t : (1-t)$.

Iš Teiginio 17 seka, kad

$$M = (1-t)A + tK, \quad N = (1-t)K + tB, \quad C = (1-t)M + tN.$$

Todėl

$$C = (1-t)\left((1-t)A + tK\right) + t\left((1-t)K + tB\right) = (1-t)^2A + 2(1-t)tK + t^2B.$$

Išraiška

$$p(t) = (1-t)^2p_0 + 2(1-t)tp_1 + t^2p_2 \quad (4.1)$$

vadinama *antrojo laipsnio Bėzier kreive*, o p_0, p_1, p_2 yra šios kreivės *kontroliniai* taškai. Taškas p_0 dažnai yra vadinamas Bėzier kreivės pradžia, o p_2 – galu.

Tokiu būdu gauname parabolės lanko tarp taškų p_0 ir p_2 pateikimo formą: jei $t = 0$, tai $p(0) = p_0$; jei $0 < t < 1$, tai $p(t)$ – vidinis lanko taškas; jei $t = 1$, tai $p(1) = p_2$; tiesė $\overline{p_0p_1}$ liečia parabolės lanką taške p_0 , o tiesė $\overline{p_1p_2}$ – taške p_2 .

P. Bėzier (Bezje) buvo prancūzų inžinierius, kuris praeitame šimtmetyje išrado šį kreivių pateikimo būdą. Mes dabar nagrinėjame tik antrojo laipsnio Bėzier kreives. Įsižiūrėkite – antro laipsnio Bėzier kreivę apibrėžime kaip afininę taškų p_0, p_1, p_2 kombinaciją su kintamais koeficientais m_0, m_1, m_2 :

$$m_0 = (1-t)^2, \quad m_1 = 2(1-t)t, \quad m_2 = t^2; \quad m_0 + m_1 + m_2 = \left((1-t) + t\right)^2 = 1.$$

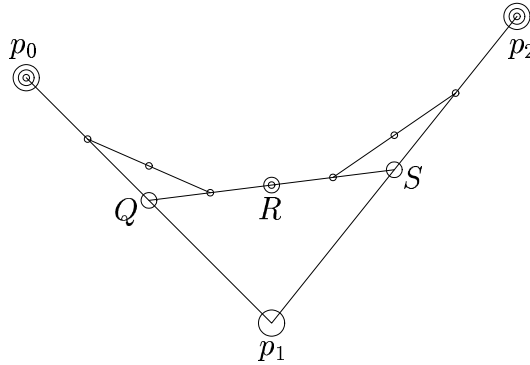
Po tokio pasufleravimo pabandykite atspėti kaip apibrėžiamos aukštesnio laipsnio Bėzier kreivės.

4.4 Parabolės lanko brėžimas: de Casteljaus algoritmas

P. de Casteljaus (de Kastelžo) buvo kitas prancūzų inžinierius (kokia kūrybinga tauta!), kuris tuo pačiu metu, tik dirbdamas kitoje firmoje (Bėzier tarnavo Renault, de Casteljaus – Citroen) išrado tas pačias kreives, kurios dabar vadinamos Bėzier vardu. Bet *labai labai svarbu* tinkamai pateikti visuomenės bosams tai ką veiki – tai žymiai svarbiau, negu tai ką iš tikro nuveiki (labai įgudus galima pateikti ką daro kiti, paslėpus, kad pats nieko nedarai). Tai viena iš priežasčių, kodėl šioms kreivėms prigijo Bėzier vardas. Įsidėmėkite tai (geometrines žinias po egzamino galite, be didelės žalos savo sveikatai, užmiršti).

Ir nors tai, kas jus tur būt labiausiai domina, jau pasakyta, panagrinėkime de Casteljaus algoritmą (žr. Pav. 4.5).

Bėzier kontroliniai taškai pažymėti dideliais apskritimais. Q yra atkarpos $\overline{p_0p_1}$ vidurys, S – atkarpos $\overline{p_1p_2}$ vidurys, R – atkarpos \overline{QS} vidurys. Iš Teiginio 19 seka, kad:



Pav. 4.5: de Casteljaus algoritmas.

- taškas R priklauso parabolei;
- tiesė $\overline{p_0Q}$ liečia parabolę taške p_0 , o tiesė \overline{QR} – taške R ;
- tiesė $\overline{p_2S}$ liečia parabolę taške p_2 , o tiesė \overline{SR} – taške R .

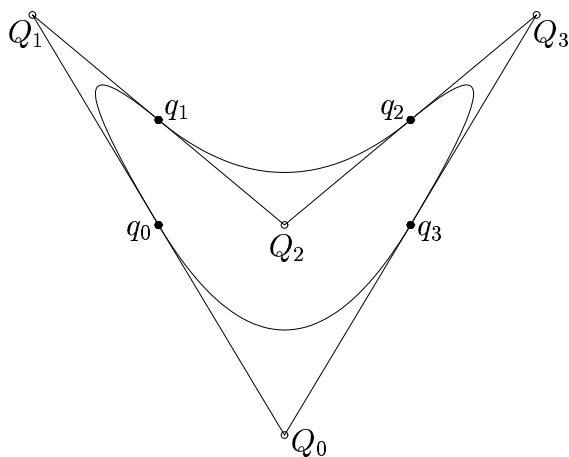
Tokiu būdu parabolės lanką (antrojo laipsnio Bėzier kreivę) suskaidome į dvi antrojo laipsnio Bėzier kreives. Šių kreivių kontroliniai taškai p_0 , Q , R ir R , S , p_2 pažymėti vidutinio dydžio apskritimais.

Tesiame šią procedūrą. Atsiranda maži apskritimai bei juos jungiančios atkarpos. Ir taip toliau ... (brėžinyje nebepavaizduota). Gauname smulkejančią laužtę, kuri sparčiai konverguoja prie pradinio parabolės lanko. Tai ir yra de Casteljaus algoritmas antrojo laipsnio Bėzier kreivėms. Jis yra naudojamas efektyviam kreivės brėžimui – kai atitinkamos laužtės atkarpų ilgiai neviršija pikselo dydžio, procedūrą tikrai galime sustabdyti.

4.5 Žaidžiame splaininėmis kreivėmis

Parabolė yra nuostabi kreivė, bet jos forma nėra įmantri. Įdomesnės formos sukuriamos jungiant įvairių parabolų lankus. Iš daugelio Bėzier kreivių sukomponuotas darinys vadinamas *splainine* kreive. Pažaiskime jomis.

Panagrinėkime, kaip galima sukonstruoti splainą, sudarytą iš antros eilės Bėzier kreivių, kai bet kurios jį sudarančios kreivės galas sutampa su sekančios kreivės pradžia ir kreivių liestinės šiame bendrame taške sutampa. Toks splainas vadinamas *glodžiu*. Jų forma džiugina akį, nes Bėzier kreivės sujungiamos švelniai, be kampų.



Pav. 4.6: Splaininė širdis.

- Nubrėžiame laužtę, sudarytą iš taškų Q_0, Q_1, \dots, Q_n (žr. Pav. 4.6);
- atkarpos $\overline{Q_i Q_{i+1}}$ vidurio tašką pažymime q_i ;
- brėžiame Bėzier kreives, kurių kontroliniai taškai yra $q_i, Q_{i+1}, q_{i+1}, 0 \leq i \leq n - 1$, ir q_n, Q_0, q_0 .

Nubrėžta laužtė labai grubiai apibūdina splaininės kreivės formą. Pasitreniravus, šią formą galima gerai jausti. Kiek gerai, priklauso nuo jūsų meninių sugebėjimų. Kadangi įstojote ne į Dailės akademiją, šie jūsų sugebėjimai nebus vertinami egzamine. Bet parašyti programą, piešiančią ką tik panagrinetas kreives, verta. Tai nesudėtinga programa. Pabandykite. Tokia veikla taip pat nebus vertinama egzamino balais. Bet negi jūsų teigiamos (neigiamos) emocijos susiję vien su egzamine gaunamu pažymiu?

4.6 Racionalios Bėzier kreivės

Antrojo laipsnio Bėzier kreivė yra parabolės lankas. Jau pramokome sudaryti iš jų įdomias splainines kreives. Bet apskritimo – vieno iš nuostabiausių žmonijos išradimų – pavaizduoti Bėzier kreive kol kas negalime. Šis trūkumas pašalinamas apibrėžiant *racionalias* Bėzier kreives.

Apibrėžimas 18 Racionali antro laipsnio Bėzier kreivė apibrėžiama formule

$$p(t) = \frac{(1-t)^2 p_0 + 2(1-t)tw p_1 + t^2 p_2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2}, \quad w > 0, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (4.2)$$

Taškai p_0, p_1, p_2 vadinami *kontroliniais* taškais, o teigiamas skaičius w vadinamas vidurinio kontrolinio taško p_1 svoriu.

Jau buvo minėta, kad antro laipsnio Bėzier kreivė yra afininė taškų p_0, p_1, p_2 kombinacija su kintamais koeficientais $(1-t)^2, 2(1-t)t, t^2$. Kadangi

$$\begin{aligned} \frac{(1-t)^2 p_0 + 2(1-t)tw p_1 + t^2 p_2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2} &= \frac{(1-t)^2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2} p_0 + \\ &+ \frac{2(1-t)tw}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2} p_1 + \frac{t^2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2} p_2 \end{aligned}$$

ir

$$\frac{(1-t)^2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2} + \frac{2(1-t)tw}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2} + \frac{t^2}{(1-t)^2 + 2(1-t)tw + t^2} = 1$$

racionali antro laipsnio Bėzier kreivė irgi yra afininė taškų p_0, p_1, p_2 kombinacija (tik su kiek kitokiais kintamais koeficientais).

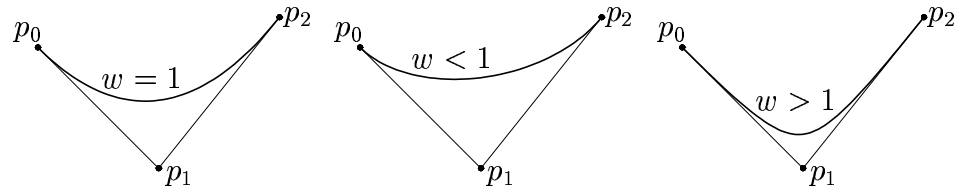
Kaip svoris w veikia racionalios kreivės formą pavaizduota Pav. 4.7. Jei $w = 1$ gauname parabolės lanką, jei $w < 1$ – elipsės lanką, jei $w > 1$ – hiperbolės lanką. Pav. 4.8 pavaizduota, kaip panaudojus svorį galime keisti splaininės kreivės formą, nekeičiant jos kontrolinių taškų.

Uždavinys Tegul $p_0 = (a; 0), p_1 = (a; b), p_2 = (0; b), w = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Parodykite, kad atitinkama racionali Bėzier kreivė yra elipsės

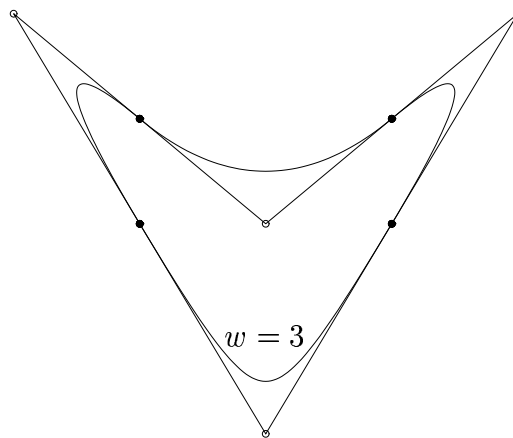
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

lankas.

Išsprendę šį uždavinį (pabandykite, jis tikrai nesudėtingas) žinosite, kad ir apskritimo ($a = b$) lankas gali būti nupieštas kaip racionali Bėzier kreivė.



Pav. 4.7: Svoris įtakoja kreivės formą.



Pav. 4.8: Svorio poveikis širdžiai.

4.7 Bézier kreivės lygties radimas

Projektuotojui (dailininkui) dirbant su Bézier kreivėmis jų lygtys dažnai rūpi kaip pernykštis sniegas. Visgi yra nemažai situacijų, kai kreivės lygtis palengvina kūrybos procesą. Pažiūrėkime kaip randama racionalios Bézier kreivės lygtis. Tai vienas iš privalomų egzaminu uždavinių.

Mes praleidžiame dviejų svarbių teiginių įrodymus.

Teiginys 20 *Racionali antrojo laipsnio Bézier kreivė yra antros eilės kreivė.*

Teiginys 21 *Antros eilės kreivės, liečiančios tiesę $l_1 = 0$ taške A ir tiesę $l_2 = 0$ taške B , lygtį galima parašyti pavidale*

$$l_1 l_2 + \beta l_3^2 = 0,$$

kur $l_3 = 0$ yra tiesės \overline{AB} lygtis.

Remiantis kiek tikslesne Teiginio 20 formuluote randama jau minėta antros eilės kreivės tipo priklausomybė nuo svorio w .

Algoritmas

Duota Racionalios antrojo laipsnio Bézier kreivės kontroliniai taškai p_0, p_1, p_2 ir taško p_1 svoris w .

- (1) Randame tiesių lygtis: $\overline{p_0 p_1} - l_1 = 0$; $\overline{p_2 p_1} - l_2 = 0$; $\overline{p_0 p_2} - l_3 = 0$;
- (2) ieškomą lygtį parašome pavidale $l_1 l_2 + \beta l_3^2 = 0$ su kol kas nežinomu β ;
- (3) randame kreivės tašką C , kuris atitinka kintamojo t reikšmę $\frac{1}{2}$;
- (4) taško C koordinatas įstatome į lygtį $l_1 l_2 + \beta l_3^2 = 0$ ir apskaičiuojame β .

Teiginių 20 ir 21 įrodymas nėra sudėtingas. Kad jūs, būsimi informatoriai, apeitumėte juose griežtos matematikos prikaišiotus pagalius, siūlome labai gerą uždavinį. Jis skirtas jau kiek prakutusiesiems kurioje nors simbolinio skaičiavimo sistemoje (pavyzdžiui MAPLE). O jei jaučiatės joje dar nejaukiai, padirbėkite, kad atkeliautų kitoks jausmas. Tikrai verta!

Uždavinys programuotojui Parašykite programą, kuri įgyvendintų ką tik pateiktą algoritmą simboliniams duomenims: $p_0 = (x_0; y_0)$, $p_1 = (x_1; y_1)$, $p_2 = (x_2; y_2)$, w . Dar daugiau, ji turi įrodyti (patikrinti), kad visi duotos racionalios kreivės taškai tenkina gautąją lygtį.

Ir dar vienas

Uždavinys skaičiuotojui rašikliu Įrodykite, kad lygtis $l_1l_2 + \beta l_3^2 = 0$ apibrėžia antros eilės kreivę, liečiančią taške p_0 tiesę $\overline{p_0p_1}$, o taške p_2 – tiesę $\overline{p_2p_1}$.

Skyrių baigiame konkrečiu algoritmo įgyvendinimu.

Sąlyga Rasti racionalios Bėzier kreivės, kurios kontroliniai taškai $p_0 = (1, 0)$, $p_1 = (2, 1)$, $p_2 = (0, 2)$ ir taško p_1 svoris $w = 3$, lygtį.

Sprendimas

(1) Randame tiesių lygtis: $x - y - 1 = 0$ ($\overline{p_0p_1}$); $x + 2y - 4 = 0$ ($\overline{p_2p_1}$);
 $2x + y - 2 = 0$ ($\overline{p_0p_2}$);

(2) ieškomą lygtį parašome pavidale $(x - y - 1)(x + 2y - 4) + \beta(2x + y - 2)^2 = 0$;

(3) randame kreivės tašką C , kuris atitinka kintamojo t reikšmę $\frac{1}{2}$:

$$C = \frac{(1 - \frac{1}{2})^2(1; 0) + 2(1 - \frac{1}{2})\frac{1}{2}3(2; 1) + \frac{1}{2}^2(0; 2)}{(1 - \frac{1}{2})^2 + 2(1 - \frac{1}{2})\frac{1}{2}3 + \frac{1}{2}^2} = \left(\frac{13}{8}; 1\right).$$

(4) skaičiuojame β :

$$\left(\frac{13}{8} - 1 - 1\right)\left(\frac{13}{8} + 2 - 4\right) + \beta\left(2\frac{13}{8} + 1 - 2\right)^2 = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{36}.$$

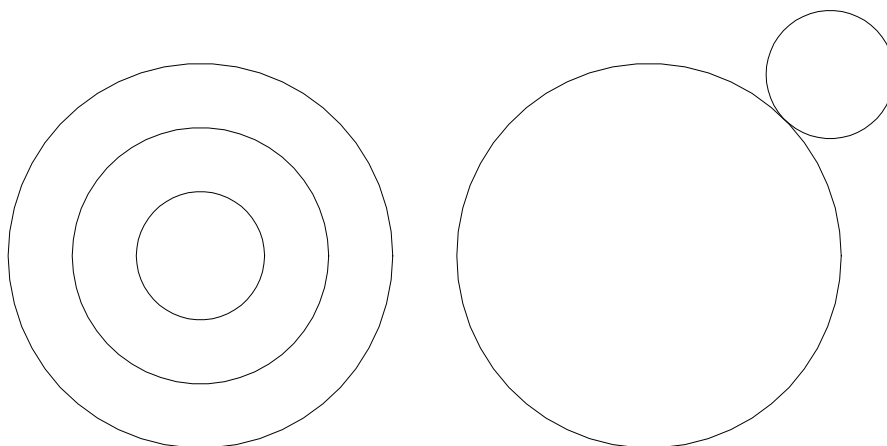
(5) susikaupe atliekame paskutinius aritmetinius veiksmus ir gauname bendrąją antros eilės kreivės lygtį:

$$8x^2 + 8xy - 19y^2 - 43x + 19y + 35 = 0.$$

4.8 Kreivės kreivis

Nagrinėjant kreives (kurios, be abejonės, yra kreivos) reikia mokėti išmatuoti jų kreivumą. Prieš apibrėžiant kreivės *kreivį* jos taške A , pasidairykime į apskritimus. Tai nuostabi kreivė – nors dar neapibrėžėme kreivės kreivio, tur būt neabejojame, kad jis turi būti vienodas visuose apskritimo taškuose.

Nepavojingas psichologinis testas



Pav. 4.9: Apskritimų palyginimas.

Pažvelkite į Pav. 4.9 kairįjį piešinį su trimis koncentriniais apskritimais. Paklausus stebėtojų, kuris šių apskritimų yra kreiviausias, galima sulaukti skirtingų atsakymų. Nenustabu, jie atrodo tokie panašūs (iš tikro, jie panašūs griežta matematine prasme). Jei to paties klausiame žvelgiančių į dešinį piešinį, atsakymas praktiškai visuomet vienodas – mažesnis apskritimas yra kreivesnis. Beje, istorijos metraščiai nutyli ar buvo šitaip testuojamas prieš savo žygį garsusis keliautojas Magelanas. Tai jis padarė Žemę apvalią – iki tol ji buvo plokščia ir patogia plūduriavo palaikoma banginių.

Nesigilindami į galimas testo išvadas, pasinaudokime apskritimu apibrėžiant kreivės kreivį (žr. Pav. 4.10).

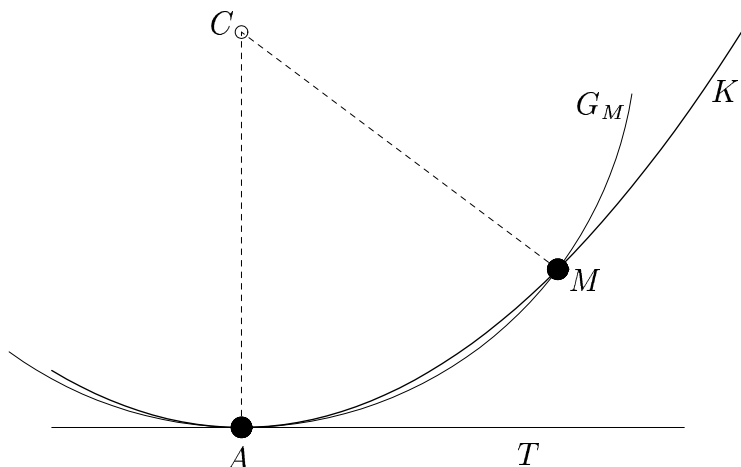
Apibrėžimas 19 Tegul A yra kreivės K taškas, o tiesė T liečia kreivę K taške A . Apskritimą, liečiantį tiesę T taške A ir einantį per gretimą kreivės K tašką M , pažymėkime G_M . Kreivės K glaudiniu apskritimu taške A vadiname

$$\lim_{M \rightarrow A} G_M .$$

Skaičius k , atvirkštinis glaudinio apskritimo spinduliui, vadinamas kreivės kreiviu taške A .

Dabar pasirūpinsime formule kreiviui skaičiuoti.

Tarkime $M(t) = (x(t); y(t))$ yra kreivės K parametrizacija taško $A = M(t_0)$ aplinkoje. Kadangi liestinė T yra kirstinių \overline{AM} ribinė padėtis taškui M artėjant į tašką A , jos krypties vektorius yra $(x'(t_0); y'(t_0))$ (visa tai žinios iš matematinės analizės). Trumpumo dėlei



Pav. 4.10: Glaustinio apskritimo konstrukcijos pradžia.

pažymime

$$(x_0; y_0) = (x(t_0); y(t_0)), \quad (x'_0; y'_0) = (x'(t_0); y'(t_0)),$$

$$(x; y) = (x(t); y(t)), \quad (x'; y') = (x'(t); y'(t)).$$

Vektorius $(-y'_0; x'_0)$ yra statmenas liestinei T . Todėl apskritimo G_M centro C koordinatės galime parašyti pavidale $C = (x_0 - y'_0 s; y_0 + x'_0 s)$. Iš sąlygos

$$|CA| = |CM| \Leftrightarrow s^2((y'_0)^2 + (x'_0)^2) = (x - x_0 + y'_0 s)^2 + (y - y_0 - x'_0 s)^2$$

gauname

$$s = \frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{x'_0(y - y_0) - y'_0(x - x_0)}.$$

Reiškinio s ribą, kai $t \rightarrow t_0$, skaičiuojame dukart taikydami Lopitalio taisyklę:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} s = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(x - x_0)x' + (y - y_0)y'}{x'_0 y' - y'_0 x'} = \frac{(x'_0)^2 + (y'_0)^2}{x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0}.$$

Iš šios formulės gauname, kad glaustinio apskritimo spindulys R yra lygus

$$\frac{(x'_0)^2 + (y'_0)^2}{|x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0|} \sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2}.$$

Pagal apibrėžimą $k = \frac{1}{R}$. Todėl

$$k = \frac{|x'_0 y''_0 - y'_0 x''_0|}{(\sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2})^3}. \quad (4.3)$$

Panašiai skaičiuodami erdvinės kreivės parametrizacijai $(x(t); y(t); z(t))$, gauname

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x'_0 & y'_0 \\ x''_0 & y''_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'_0 & z'_0 \\ x''_0 & z''_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'_0 & z'_0 \\ y''_0 & z''_0 \end{vmatrix}^2}}{(\sqrt{(x'_0)^2 + (y'_0)^2 + (z'_0)^2})^3}. \quad (4.4)$$

4.9 Kai kurių uždavinių sprendimai

Sąlyga Rasti kreivės $K = (2t^3 - t + 1; -t^2 + 4t + 2)$ kreivį jos taške, atitinkančiame parametro reikšmę $t_0 = \frac{1}{3}$.

Sprendimas Pažymėję $x(t) = 2t^3 - t + 1$, $y(t) = -t^2 + 4t + 2$, diferencijuojame:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 6t^2 - 1, \quad y'(t) = 2t + 4, \\ x''(t) &= 12t, \quad y''(t) = 2. \end{aligned}$$

Suskaičiuojame šias išvestines, kai $t = \frac{1}{3}$, ir pasinaudoję formule (4.3) gauname

$$k = \frac{522}{(\sqrt{197})^3}.$$

Dar viena sąlyga Rasti Bézier kreivės, kurios kontroliniai taškai yra $p_0 = (2; 1)$, $p_1 = (1; 3)$, $p_2 = (-1; 0)$, kreivį taške p_0 .

Sprendimas Randame Bézier kreivės parametrinę išraišką

$$K = (1-t)^2(2; 1) + 2(1-t)t(1; 3) + t^2(-1; 0) = (-t^2 - 2t + 2; -5t^2 + 4t + 1).$$

Vėl panaši rutina: skaičiuojame išvestines kai $t = 0$, naudojames formule (4.3) ir gauname

$$k = \frac{7}{2(\sqrt{5})^3}.$$

4.10 Keletas uždavinių savarankiškam darbui

1. Rasti kreivės $(t; t^2; t^3)$ kreivį taške $(1; 1; 1)$.

2. Rasti Bézier kreivės, kurios kontroliniai taškai yra $p_0 = (1; 1)$, $p_1 = (2; 3)$, $p_2 = (0; 4)$, kreivį taške p_2 .

3. Rasti Bézier kreivės, kurios kontroliniai taškai yra $p_0 = (1; 1)$, $p_1 = (2; 3)$, $p_2 = (-1; 4)$, lygtį.

4. Rasti racionalios Bézier kreivės, kurios kontroliniai taškai yra $p_0 = (1; 1)$, $p_1 = (2; 3)$, $p_2 = (-1; 4)$ ir $w = 2$, lygtį.

Dalis 5

Laisvalaikio skaitalas

5.1 Bėzier paviršiai

Ši dalis yra vien informacinio (reklaminio) pobūdžio. Ruošiantis egzaminui galima ją praleisti.

Bėzier paviršiai gaunami pritaikius mums jau žinomą metodą – paviršius traktuojamas kaip besikeičiančių kreivių šeima. Bėzier paviršių atveju šios kreivės yra Bėzier kreivės, kurių *besikeičiantys* kontroliniai taškai irgi sudaro Bėzier kreives.

Bėzier paviršius apibrėžiamas devyniais *kontroliniais* taškais p_{ij} , $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq j \leq 2$. Kad būtų lengviau suvokti erdvinę kontrolinių taškų konfigūraciją, jie sujungiami į tinklą (žr. Pav. 5.1). Šis tinklas vadinamas Bėzier paviršiaus *kontroliniu tinklu*.

Bėzier paviršiaus konstrukcija

(1) sudaromos trys pagalbinės Bėzier kreivės (žr. Pav. 5.2):

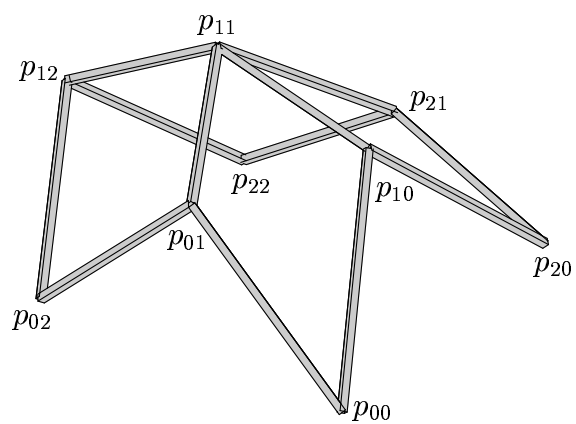
$Q_0(u)$ su kontroliniais taškais p_{00} , p_{10} , p_{20} ;

$Q_1(u)$ su kontroliniais taškais p_{01} , p_{11} , p_{21} ;

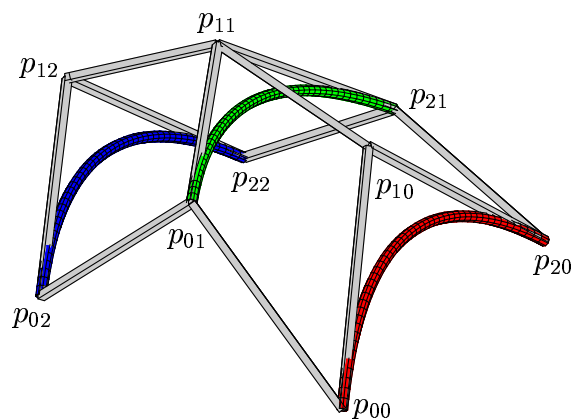
$Q_2(u)$ su kontroliniais taškais p_{02} , p_{12} , p_{22} ;

(2) brėžiamos besikeičiančios Bėzier kreivės P_u su kontroliniais taškais $Q_0(u)$, $Q_1(u)$, $Q_2(u)$; jos ir užpildo Bėzier paviršių (žr. Pav. 5.3).

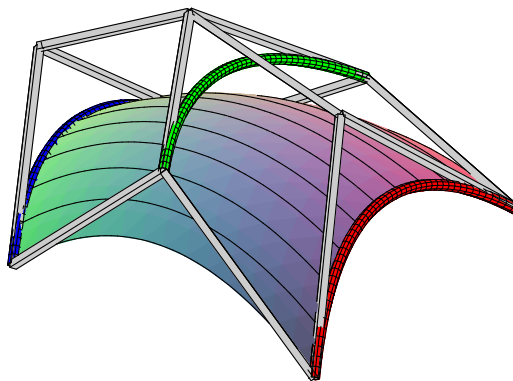
Pav. 5.1, 5.2, 5.3 yra mokomojo pobūdžio. Realiai projektuojant paviršius užtenka matyti jo kontrolinį tinklą (Pav. 5.1), patį paviršių su kontroliniu tinklu (Pav. 5.4) ir, be abejonės, galutinį rezultatą (Pav. 5.5).



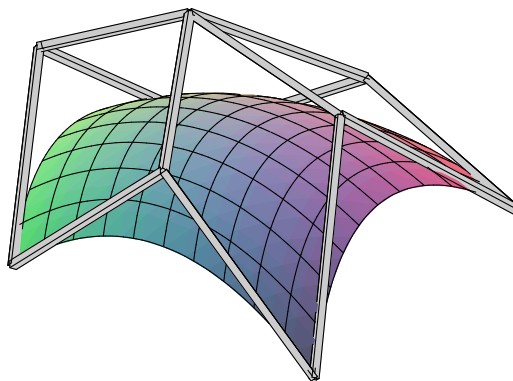
Pav. 5.1: Bézier paviršiaus kontrolinių taškų tinklas.



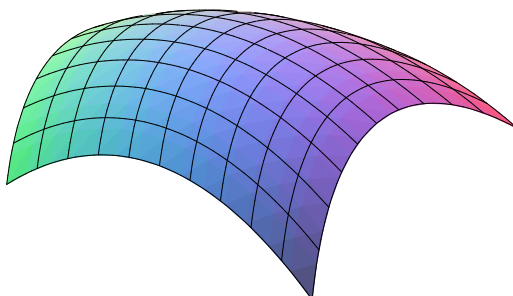
Pav. 5.2: Pagalbinės Bézier kreivės.



Pav. 5.3: Besikeičiančios Bėzier kreivės užpildo paviršių.



Pav. 5.4: Bėzier paviršius su kontrolinių taškų tinklu.



Pav. 5.5: Bėzier paviršius.

Remiantis pateikta Bėzier paviršiaus konstrukciją nesunku gauti jo parametrinę išraišką. Šia išraiška galėsite naudotis patogiai piešdami Bėzier paviršius MAPLE paketu.

Bėzier paviršiaus parametrinis pavidalas

- $$\begin{aligned}
 Q_0(u) &= (1-u)^2 p_{00} + 2(1-u)u p_{10} + u^2 p_{20} ; \\
 Q_1(u) &= (1-u)^2 p_{01} + 2(1-u)u p_{11} + u^2 p_{21} ; \\
 Q_2(u) &= (1-u)^2 p_{02} + 2(1-u)u p_{12} + u^2 p_{22} .
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

- besikeičiančios Bėzier kreivės P_u su kontroliniais taškais $Q_0(u), Q_1(u), Q_2(u)$ parametru žymime v ; naudodamiesi formule 5.1 gauname

$$\begin{aligned}
 P_u(v) &= (1-v)^2 Q_0(u) + 2(1-v)v Q_1(u) + v^2 Q_2(u) \\
 &= ((1-u)^2 p_{00} + 2(1-u)u p_{10} + u^2 p_{20})(1-v)^2 \\
 &\quad + ((1-u)^2 p_{01} + 2(1-u)u p_{11} + u^2 p_{21})2(1-v)v \\
 &\quad + ((1-u)^2 p_{02} + 2(1-u)u p_{12} + u^2 p_{22})v^2 .
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

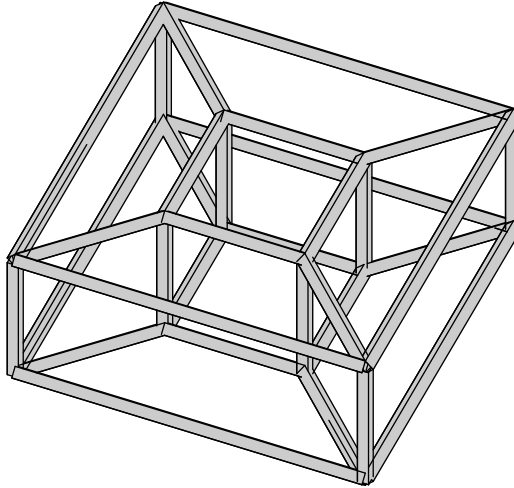
- pažymime $P(u, v) := P_u(v)$; atlikę elementarius aritmetinius veiksmus gauname parametrinę Bėzier paviršiaus formą $P(u, v)$:

$$\begin{aligned}
 P(u, v) &= m_{00}p_{00} + m_{11}p_{10} + m_{20}p_{20} \\
 &\quad + m_{01}p_{01} + m_{11}p_{11} + m_{21}p_{21} \\
 &\quad + m_{02}p_{02} + m_{21}p_{12} + m_{22}p_{22} ,
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

kur

$$\begin{aligned}
 m_{00} &= (1-u)^2(1-v)^2 & m_{10} &= 2(1-u)u(1-v)^2 & m_{20} &= u^2(1-v)^2 \\
 m_{01} &= 2(1-u)^2(1-v)v & m_{11} &= 4(1-u)u(1-v)v & m_{21} &= 2u^2(1-v)v \\
 m_{02} &= (1-u)^2v^2 & m_{12} &= 2(1-u)uv^2 & m_{22} &= u^2v^2
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

Kadangi koeficientų m_{ij} suma lygi 1, Bėzier paviršius yra kontrolinių taškų p_{ij} afininė kombinacija su kintamais koeficientais. Šis paviršius vadinamas *bilaipsnio* $(2, 2)$ Bėzier paviršiumi. Jei jau supratote, kaip apibrėžiamos aukštesnio laipsnio Bėzier kreivės, pabandykite sukonstruoti bet kokio bilaipsnio (m, n) Bėzier paviršių.

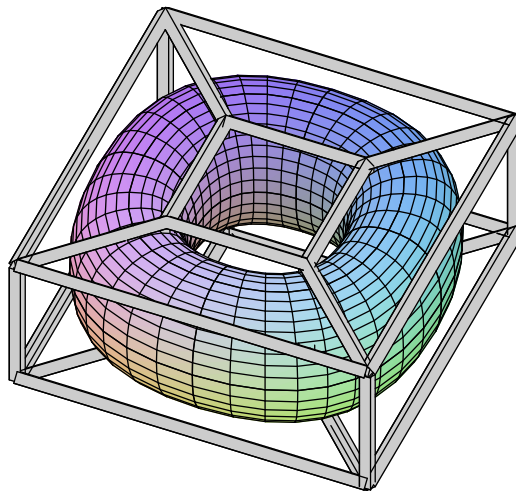


Pav. 5.6: Splaininių paviršių kontroliuojantis tinklas.

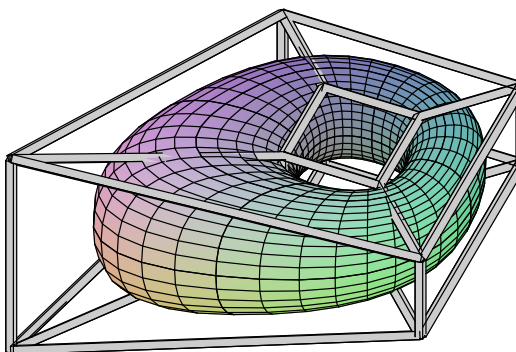
Splaininiai paviršiai sudaromi iš glodžiai besijungiančių Bėzier paviršių. Jų konstrukcija yra atitinkamų procedūrų, taikomų kreivėms, apibendrinimas. Tokie apibendrinimai nėra lengvas skaitalas valgant ledus. Bet jie nėra ir labai sudėtingi. Konstruojant glodžius splaininius paviršius susiduriama su kitais esminiais sunkumais. Jie ir dabar yra daugelio tyrinėtojų galvos skausmas. Bet tur būt jau žinote, kaip yra malonu, kai galva nebeskauda.

Pasižvalgykite į neskausmingą atvejį – nesudėtingą splaininių kreivių apibendrinimą paviršiams.

Splaininių kreivių atveju laisvai pasirenkamos kontroliuojančios laužtės viršūnės. Splaininių paviršių atveju laisvai pasirenkamos kontroliuojančio tinklo viršūnės. Pav. 5.6 pavaizduotas toks tinklas. Splaininiu paviršiumi galite pasigrožėti Pav. 5.7. Kontroliuojančio tinklo kitimo poveikis splaininiam paviršiui demonstruojamas Pav. 5.8.



Pav. 5.7: Splaininis paviršius.



Pav. 5.8: Splaininio paviršiaus kaita.